वाई तालुका गणित अध्यापक मंडळ, वाई

1.	मिश्र संख्या	- प्रा.म.रा.राईलकर	15.00
2.	विभागणी व तिची भावंडे	- डॉ.व.ग.टिकेकर	15.00
3.	गणिती युक्तिवाद	- प्रा.य.ना.वालावलकर	15.00
4.	गणित मौज	- श्री.ना.शं.मोने	15.00
5.	कोनाचं त्रिभाजन	- प्रा.म.रा.राईलकर	15.00
6.	संख्यानगरीत भटकंती	- श्री.पी.के.श्रीनिवासन् अनुवाद : डॉ.मधुकर देशपांडे	20.00
7.	गणितातील कयास, खरे व चुकलेले	- डॉ.व.ग.टिकेकर	20.00
8.	क्षेत्रफळ आणि घनफळ, काही तात्त्विक पैलू	- डॉ.रवींद्र बापट	20.00
9.	ऋण संख्या	- प्रा.म.रा.राईलकर श्री.ना.शं.मोने	20.00
10.	भूमितीय रचना	- श्री.ना.शं.मोने	20.00
11.	सममिती आणि इतर	- प्रा.म.रा.राईलकर	20.00
12.	दिनदर्शिकेमधली जादू	- श्री.पी.के.श्रीनिवासन अनुवाद : डॉ.मधुकर देशपांडे	20.00
13.	एकाच माळेचे मणी	- श्री.ना.शं.मोने	20.00
16.	दोन मुलाखती	- संकलन : श्री.ना.शं.मोने	20.00
17.	गणितींचे किस्से	- डॉ.व.ग.टिकेकर	20.00
18.	निर्देशक भूमिती	- प्रा.म.रा.राईलकर	20.00
19.	त्रिकोण नगरीसह भूमितीची विविधता	- प्रा.डॉ.सदाशिव देव	50.00
20.	संख्यामालिका	- श्री.दिलीप गोटखिंडीकर	40.00
21.	विधान एक : सिद्धता अनेक भाग (1)	- डॉ.व.ग.टिकेकर	50.00
22.	विधान एक : सिद्धता अनेक भाग (2)	- डॉ.व.ग.टिकेकर	50.00
23.	कापा आणि जोडा	- प्रा.म.रा.राईलकर	30.00
24.	अपूर्णांक	- प्रा.म.रा.राईलकर	20.00
25.	दशांश अपूर्णांक	- प्रा.म.रा.राईलकर	20.00
26.	समीकरण	- प्रा.म.रा.राईलकर	20.00
27.	पायथागोरसची त्रिकुटे	- प्रा.डॉ.सदाशिव देव	50.00
28.	गणित फुले	- डॉ.व.ग.टिकेकर	50.00
29.	अपूर्णांक : आजीकडून शिका (सी.डी.)	- प्रा.म.रा.राईलकर	40.00
30.	कापा आणि जोडा (सी.डी.)	- प्रा.म.रा.राईलकर	50.00

सर्व पुस्तकांसाठी श्री.ना.शं.मोने, 1123, भाग्योदय, ब्राह्मणशाही, वाई.
दूरध्वनी : (02167) 220766. मोबाईल : 9226283203. यांच्याशी संपर्क साधावा.

अक्षरजुळणी
टाईप इनोव्हेटर्स, सातारा. फोन :- (02162) 234372

संपादक
नागेश शंकर मोने

संपादन साह्य
श्री. अरूण सावंत
श्री. भगवान भुजबळ
सौ. अनुराधा जोशी

प्रकाशक
श्री.दिनकर वि. फरांदे
अध्यक्ष, वाई तालुका गणित अध्यापक मंडळ
वाई

प्रकाशन वर्ष
1 ऑगस्ट 2010

लेखक
प्रा.डॉ.व.ग.टिकेकर
द्वारा डॉ.भरत ठकार, नवा महाद्वार रस्ता
कोल्हापूर : 416 012.
दूरध्वनी : (0231) 2642304

मुद्रक
सरस्वती ऑफसेट
275 क, मंगळवार पेठ, सातारा.
दूरध्वनी : (02162)-284430

मूल्य रूपये - 50/-

गणित फुले

डॉ. व.ग. टिकेकर

अनुक्रमणिका

हे पुस्तक प्रकाशित करण्यासाठी श्री.नागेश शंकर मोने यांनी व वाई तालुका गणित अध्यापक मंडळ, वाई यांनी घेतलेल्या परिश्रमांबद्दल व दाखविलेल्या उत्साहाबद्दल लेखक त्यांचा आभारी आहे.

अर्पण पत्रिका

मानवी जीवनात भाऊ व बहीण या नात्यांचे विशेष स्थान असते. सर्वसाधारणत: एकाच पिढीत मोडणाऱ्या या व्यक्ती असतात. (येऊ घातलेल्या, नव्हे, जवळ जवळ येऊन ठेपलेल्या, एकच अपत्य असण्याच्या कुटूंबपद्धतीमुळे, प्रत्येकाला भाऊ बहिण असेलच असे नाही अशा स्थितीप्रत समाज येऊन पोहोचला आहे, व ही बाब समाजशास्त्रज्ञांना चिंतेची ठरावी.) मला व माझ्या सत्शील व निष्कपट पत्नीला या बहीण-भाऊ नात्यांचा उत्तम अनुभव मिळाला. आम्हा उभयतांना या निर्व्याज, व निखळ स्नेहाचा अनुभव देणारे आमचे भाऊ- बहिण व त्यांचे जीवनसाथी (spouse) यांना स्नेहपूर्ण भक्तिभावाने ही कृती अर्पण करण्यात मला धन्यता वाटते. ही मंडळी आहेत :

श्री. श्रीनिवास (उर्फ शाम) गजानन, व सौ. शैलजा श्रीनिवास टिकेकर
सौ. अनुराधा (nee अंबू) रमेश, व श्री. रमेश अ.अळतेकर
कु. सुधा गजानन टिकेकर
कै. सौ. आरती(nee प्रभा) वसंत, व श्री. वसंत स. करमळकर
सौ. पुष्पा (nee निर्मला) सुभाष, व श्री. सुभाष रा. नवरे
कै.श्रीपाद (उर्फ रमेश) गजानन टिकेकर
कु. विजया (उर्फ लता) गजानन टिकेकर
कै. नारायण रामकृष्ण, व कै. लक्ष्मी नारायण जावडेकर,
कै. वसंत रामकृष्ण, व कै. सौ. प्रभावती वसंत जावडेकर,
श्रीमती मंदाकिनी वसंत जावडेकर
कै. इंदिरा (nee मालती) दत्तात्रय, व कै. दत्तात्रय नारायण अलुरकर
श्री.मधुसूदन रामकृष्ण, व सौ. पुष्पा मधुसूदन जावडेकर
सौ. सरल (nee शकुंतला) रामचंद्र, व श्री. रामचंद्र बाळकृष्ण ठकार
श्री. मुकूंद रामकृष्ण, व सौ. उषा मुकूंद जावडेकर,
कै. सौ. वसुधा मुकूंद जावडेकर

– व.ग. टिकेकर

*

समस्या अनेक, उत्तर एक

1. विषय-प्रवेश :

'हगीज एक, प्रसंग अनेक' अशी एक आणि 'आजार अनेक सुरक्षा एक' अशी दुसरी एक जाहिरात दूरचित्रवाणीवर कधी कधी दिसते. त्यातून 'प्रश्न अनेक असले व त्या सर्वांमध्ये विविधता असली तरी त्या सर्वांची उकल एकच असते' असे त्यांना सुचवायचे असते. हे एक प्रकारचे एकीकरण (unificaton) आहे. भौतिकीमध्ये विद्युत-प्रेरणा (electric force), चुंबकीय प्रेरणा (magnetic force), गुरूत्वाकर्षणीय प्रेरणा (gravitational force) अशा निरनिराळ्या प्रेरणांचे एकीकरण करून त्यातील काही प्रेरणा एकाच प्रकारच्या प्रेरणेचे विविध अवतार असल्याचे दाखविण्याचे प्रयत्न होत आले आहेत. गणितात एकाच विधानाच्या अगदी भिन्न भिन्न सिद्धता असू शकतात. (पहा : वाई तालुका गणित अध्यापक मंडळाने प्रकाशित केलेली पुस्तके : 'विधान एक-सिद्धता अनेक,' भाग 1, 2). त्याचप्रमाणे काही निरनिराळ्या प्रश्नांचे स्वरूप वरकरणी अगदी वेगवेगळ्या प्रकारांचे असल्याचे दिसून आले तरी, त्यांच्या अंतर्यामी एक अधोरेखित धागा असा असू शकतो की त्यावरून अगदी भिन्न भिन्न भासणाऱ्या सर्व प्रश्नांचे उत्तर एकच येते. असे घडणे अनपेक्षित व आश्चर्यकारक वाटले तरी, गणित त्या मागील सत्य उलगडून दाखवू शकते. यासाठी आपण वेगवेगळ्या परिस्थितीतून उद्‌भवलेल्या आठ समस्या अभ्यासूया व त्यांची उत्तरे शोधूया.

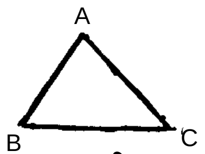
2. समस्या 1

n (= 3, 4, 5, 6, 7, ...) बाजू असलेली (आणि त्यामुळे अर्थातच तितकेच कोन असलेली) सुसम बहुभुजाकृती घ्या. (उदाहरणार्थ, समभुज त्रिकोण, चौरस, सुसम पंचकोन, सुसम षटकोन,... इत्यादी. व्यापकदृष्ट्या या आकृत्यांना सुसम n - कोन किंवा सुसम n - भुजाकृती असेही म्हणतात.) तिच्या शिरोबिंदूंना नावे द्या. या आकृतीचे एकमेकांना न छेदणारे कर्ण काढून ही सुसम बहुभुजाकृती एकूण किती प्रकारे n - 2 त्रिकोणात विभागता येईल ?

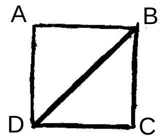
टीप (1) : सुसम बहुभुजाकृतीच्या शिरोबिंदूंना नावे दिली आहेत. ह्यामुळे ती विभागून मिळणाऱ्या त्रिकोणाच्या शिरोबिंदूंनाही नावे असतील. एखाद्या विभागणीतील एका त्रिकोणाचे नाव जरी दुसऱ्या विभागणीतील त्रिकोणांच्या

नावांहून निराळे असेल तरी त्या दोन विभागण्या वेगवेगळ्या असल्याचे मानले जाईल. म्हणजे वेगवेगळ्या अभिमुखता (orientations) वेगवेगळ्या मानल्या जातील. अर्थात Δ PQR, ΔPRQ, Δ QPR, ΔQRP, ΔRPQ, व ΔRQP ही नावे भिन्न भिन्न असली तरी तो एकच त्रिकोण असल्याचे धरले जाईल. व हे सर्व त्रिकोणांना लागू आहे.

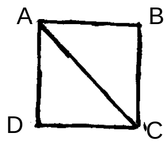
उत्तर : (1) समभुज त्रिकोण Δ ABC घ्या. येथे n = 3 म्हणून n - 2 = 1. त्रिकोणाच्या मधून जाणारा कर्ण नसतोच. त्यामुळे अर्थातच ΔABC हा एका त्रिकोणात एकाच प्रकारे विभागता येईल (आकृती 1). Δ ABC ची , Δ ABC हीच एक विभागणी होईल.



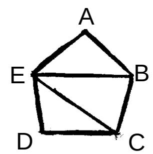
आकृती 1 : समभुज Δ ABC ची एकमेव विभागणी



आकृती 2 : चौरस ABCD ची विभागणी 1



आकृती 3 : चौरस ABCD ची विभागणी 2



आकृती 4 : सुसम पंचकोन ABCDE ची विभागणी 1

(2) चौरस ABCD घ्या. येथे n = 4. म्हणून n - 2 = 2. चौरस ABCD च्या, त्याच्या एकमेकांना न छेदणाऱ्या कर्णांमुळे, 2 त्रिकोणात एकूण 2 प्रकारे विभागण्या करता येतील. (आकृती 2 व 3)

विभागणी 1 = { Δ ABD, Δ BCD}. विभागणी 2 = { Δ ABC, Δ ACD}

टीप (2): चौरसाच्या शिरोबिंदूंना नावे न दिल्यास आकृती 2 ला घड्याळाचे काटे ज्या प्रकारे फिरतात त्याप्रकारे 90^0 मधून फिरविल्यास आकृती 3 मिळेल व त्यावेळी आकृती 2 मधील Δ ABD हा आकृती 3 मधील Δ ABC सारखा दिसेल. म्हणजे आकृती 2 व 3 यांची अभिमुखता (orientation) वेगवेगळी आहे. म्हणून टीप (1) मध्ये वेगवेगळ्या अभिमुखता वेगवेगळ्या विभागण्या देतात असे आवर्जून सांगितले आहे.

(3) सुसम पंचकोन ABCDE घ्या. येथे n = 5 व त्यामुळे n - 2 = 3. सुसम पंचकोन ABCDE च्या, त्या एकमेकांना न छेदणारे कर्ण काढून, प्रत्येकी 3 त्रिकोणात एकूण 5 निरनिराळ्या प्रकारे विभागण्या करता येतील (आकृती 4, 5, 6, 7, 8) :

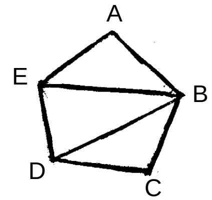
विभागणी 1 = { Δ ABE, Δ BEC, Δ CED } (आकृती 4)

विभागणी 2 = { Δ ABE, Δ BDE, Δ BCD } (आकृती 5)

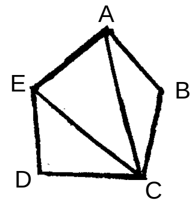
विभागणी 3 = { Δ ABC, Δ ACE, Δ CED } (आकृती 6)

विभागणी 4 = { Δ ABC, Δ ACD, Δ ADE } (आकृती 7)

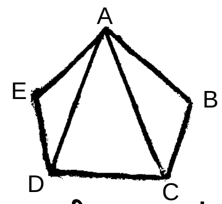
विभागणी 5 = { Δ ADE, Δ ABD, Δ BCD } (आकृती 8)



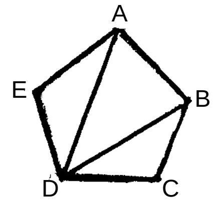
आकृती 5 : सुसम पंचकोन ABCDE ची विभागणी 2



आकृती 6 : सुसम पंचकोन ABCDE ची विभागणी 3



आकृती 7 : सुसम पंचकोन ABCDE ची विभागणी 4



आकृती 8 : सुसम पंचकोन ABCDE ची विभागणी 5

(4) सुसम षटकोन ABCDEF घ्या. येथे n = 6; म्हणजे n - 2 = 4. सुसम षटकोन ABCDEF च्या, त्याचे एकमेकांना न छेदणारे कर्ण काढून, प्रत्येकी 4 त्रिकोणात एकूण 14 निरनिराळ्या प्रकारे विभागण्या करता येतील (आकृत्या 9 ते 22) :

विभागणी 1 = { Δ ABC, Δ ACD, Δ ADE, Δ AEF } (आकृती 9)

विभागणी 2 = { Δ ABF, Δ FBE, Δ EBD, Δ DBC } (आकृती 10)

विभागणी 3 = { Δ ABC, Δ ACF, Δ FCE, Δ ECD } (आकृती 11)

विभागणी 4 = { Δ DBC, Δ DAB, Δ DFA, Δ DEF } (आकृती 12)

विभागणी 5 = { Δ EFA, Δ EAB, Δ EBC, Δ ECD } (आकृती 13)

विभागणी 6 = { Δ FAB, Δ FBC, Δ FCD, Δ FDE } (आकृती 14)

विभागणी 7 = { Δ ABC, Δ ACD, Δ ADF, Δ FDE } (आकृती 15)

विभागणी 8 = { Δ ABC, Δ ACF, Δ FCD, Δ FDE } (आकृती 16)

विभागणी 9 = { Δ DBC, Δ EFA, Δ EAB, Δ EBD } (आकृती 17)

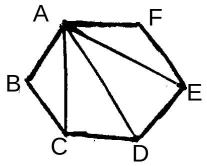
विभागणी 10 = { Δ DBC, Δ EFA, Δ DAB, Δ ADE } (आकृती 18)

विभागणी 11 = {Δ ABF, Δ ECD, Δ FBC, Δ FCE } (आकृती 19)

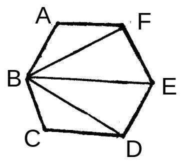
विभागणी 12 = { Δ ABF, Δ ECD, Δ FBE, Δ EBC } (आकृती 20)

विभागणी 13 = { Δ ABC, Δ AEF, Δ ECD, Δ ACE } (आकृती 21)

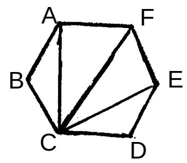
विभागणी 14 = { Δ ABF, Δ DEF, Δ DBC, Δ BFD } (आकृती 22)



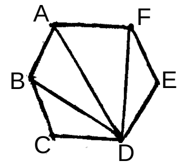
आकृती 9



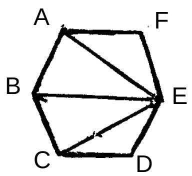
आकृती 10



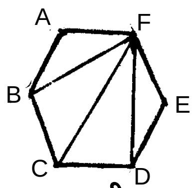
आकृती 11



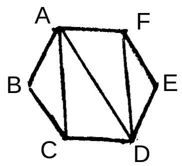
आकृती 12



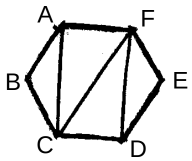
आकृती 13



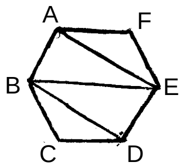
आकृती 14



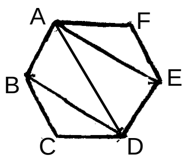
आकृती 15



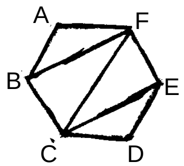
आकृती 16



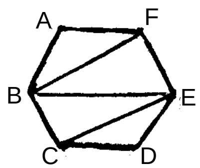
आकृती 17



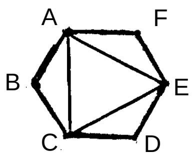
आकृती 18



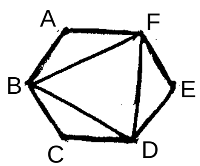
आकृती 19



आकृती 20



आकृती 21



आकृती 22

वरील विवेचन व त्यावर आधारित आकृत्या 1 ते 22 वरून सुसम n - भुजाकृती, तिचे एकमेकांना न छेदणारे कर्ण काढून n - 2 त्रिकोणात किती निरनिराळ्या प्रकारे विभागता येते ही माहिती कोष्टक 1 मध्ये एकत्र केली आहे.

कोष्टक 1

सुसम n - भुजाकृतीच्या बाजूंची संख्या n	3	4	5	6	.....
एकमेकांना न छेदणारे कर्ण काढून मिळणाऱ्या n - 2 त्रिकोण असणाऱ्या विभागण्यांची संख्या	1 (आकृती 1)	2 (आकृती 2 व 3)	5 (आकृती 4 ते 8)	14 (आकृती 9 ते 22)	.....

टीप (3) : वर दाखविलेल्या 14 प्रकारांव्यतिरिक्त इतर कोणत्याही प्रकारे सुसम षटकोन ABCDEF चार त्रिकोणात (एकमेकांना न छेदणारे कर्ण काढले असता) विभागात येणार नाही याची आकृत्या काढून वाचकांनी खात्री करून घ्यावी.

टीप (4) : याचप्रमाणे सुसम सप्तकोन, सुसम अष्टकोन इत्यादी (म्हणजे n = 7, 8, 9, ... असता) सुसम n - भुजाकृती, त्यांचे एकमेकांना न छेदणारे कर्ण काढून, किती निरनिराळ्या प्रकारे n - 2 त्रिकोणात विभागता येतात हे वाचकांनी अभ्यासावे व कोष्टक 1 आणखीन वाढवावे.

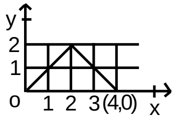
टीप (5) : या लेखातील प्रत्येक समस्येसंबंधित मिळणारे कोष्टक व कोष्टक 1 यांची तुलना करीत रहावे.

३.समस्या 2 :

आलेख-कागद घ्या. त्यावर m व n हे दोन्ही पूर्णांक असतील असे निर्देशक बिंदू (m, n) मांडा. ज्यांचे m व n हे दोन्ही घटक पूर्णांक आहेत अशा निर्देशक बिंदूंना आलेखाचे जालक-बिंदू (lattice points) म्हणतात. (0, 0) पासून सुरूवात करून (2n + 2, 0) पर्यंत (n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...) दिलेले नियम (अटी) पाळून किती निरनिराळ्या प्रकारे जाता येते हे शोधून काढा. या प्रवासाचे नियम असे आहेत : (i) सुरूवात (0, 0) व शेवट (2n + 2, 0) सोडून क्ष-अक्षावर कधीही येता कामा नये; (ii) कोणत्याही बिंदूपासून वर वा खाली फक्त जालक-बिंदूंनी तयार झालेल्या लहानात लहान चौरसांच्या कर्णांच्याच दिशेने

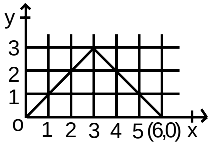
जाता येईल. क्ष-अक्षाला वा य-अक्षाला समांतर प्रवास करता येणार नाही.
(iii) एका जालक-बिंदू पासून दुसऱ्या जालक-बिंदू पर्यंतच गेले पाहिजे; आणि
(iv) प्रत्येक पाऊल हे पुढेच म्हणजे अधिक क्ष-निर्देशक असलेल्या बिंदूकडेच गेले पाहिजे.

उत्तर : 1) $n = 1$, $2n + 2 = 4$

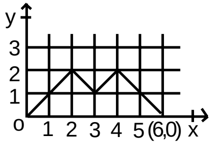


आकृती 23

2) $n = 2$, $2n + 2 = 6$

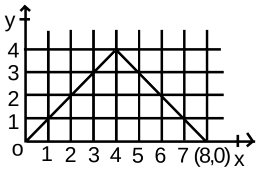


आकृती 24

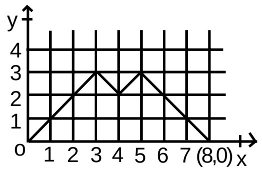


आकृती 25

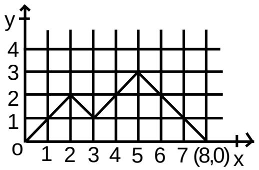
3) $n = 3$, $2n + 2 = 8$



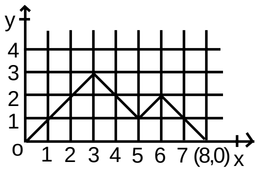
आकृती 26



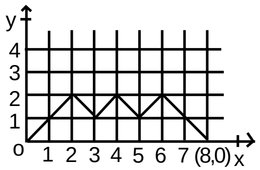
आकृती 27



ओकृती 28

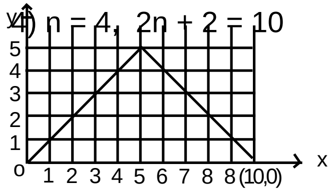


आकृती 29

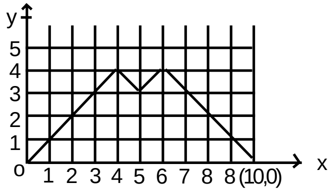


आकृती 30

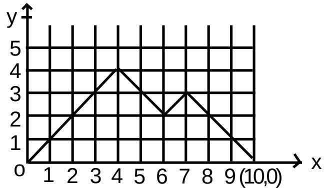
4) $n = 4$, $2n + 2 = 10$



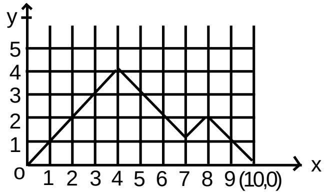
आकृती 31



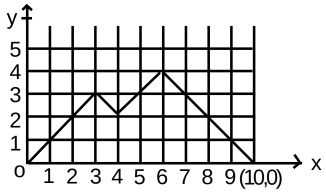
आकृती 32



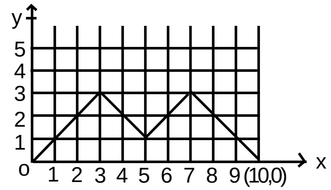
आकृती 33



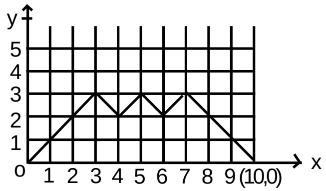
आकृती 34



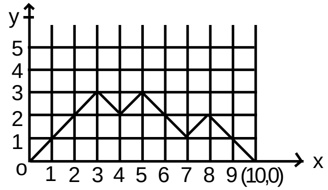
आकृती 35



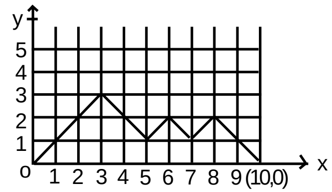
आकृती 36



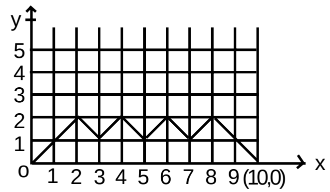
आकृती 37



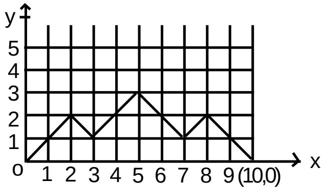
आकृती 38



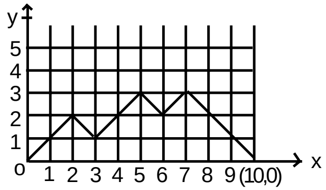
आकृती 39



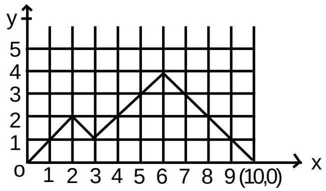
आकृती 40



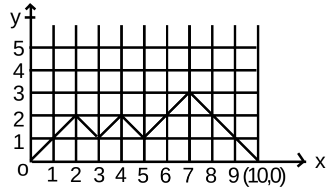
आकृती 41



आकृती 42



आकृती 43



आकृती 44

आकृती 23 ते 44 वरून n च्या निरनिराळ्या किंमतीसाठी आलेख कागदावर (0, 0) पासून (2n + 2, 0) पर्यंतच्या प्रवासासाठी घातलेले सर्व नियम पाळून तो प्रवास किती निरनिराळ्या प्रकारे करता येतो ही माहिती कोष्टक 2 मध्ये एकत्रित केली आहे.

कोष्टक 2

n	1	2	3	4	....
घातलेले सर्व नियम पाळून (0, 0) पासून (2n + 2, 0) पर्यंतचा, आलेख-कागदावरील प्रवास किती वेगवेगळ्या प्रकारे करता येतो ती संख्या	1 (आकृती 23)	2 (आकृती 24 व 25)	5 (आकृती 26 ते 30)	14 (आकृती 31 ते 44)	....

टीप (6) : येथे हे लक्षात ठेवावयाचे की समस्या 1 व 2 मध्ये दिलेल्या प्रश्नांचे स्वरूप खूप वेगवेगळे असले तरी त्या प्रत्येक प्रश्नात लागू पडणाऱ्या n च्या किंमती लहानाकडून मोठ्याकडे ओळीने घेतल्यास दिलेली समस्या 1, 2, 5, 14 निरनिराळ्या प्रकारे सोडविता येते. या दोन्ही प्रश्नात n च्या पुढील किंमतीसाठी त्या समस्या निरनिराळ्या किती प्रकारे सोडविता येतात याचा वाचकांनी वेध घ्यावा व कोष्टक 1 व 2 मध्ये भर घालावी. समस्या 3 ते 4 मध्येही अशीच परिस्थिती निर्माण होणार आहे.

4. समस्या 3

कोणत्याही n + 1 अक्षरांचा क्रम (sequence) घ्या. (उदाहरणार्थ, apxbm. या क्रमात 5 अक्षरे आहेत; म्हणजे यात n = 4). दिलेल्या क्रमातील अक्षरांचा क्रम न बदलता त्या क्रमामध्ये कोठेही कंसांच्या जोड्या [डावा कंस '(', आणि उजवा कंस ')'] अशा टाकावयाच्या आहेत की (i) प्रत्येक कंसजोडीमध्ये दोन आणि फक्त दोनच अक्षरे असतील आणि (ii) कोणतेही अक्षर कोणत्यातरी कंस जोडीच्या आत असलेच पाहिजे. दोन अक्षरे एका कंसजोडीत पडली की आतील दोन अक्षरांसकट ती कंसजोडी एकच अक्षर दर्शविते असे मानले जाईल. उदाहरणार्थ, d व (bc) ही मांडणी प्रत्येकी एक अक्षर दर्शवितात; म्हणजेच (d (bc)) यातील बाहेरच्या कंसजोडीत नियमानुसार d आणि (bc) ही दोनच अक्षरे आहेत. n च्या निरनिराळ्या किंमतींसाठी घेतलेल्या अक्षरांच्या क्रमात अशाप्रकारे किती वेगवेगळ्या प्रकारे कंसजोड्या टाकता येतील ?

उत्तर 1) n = 1. म्हणजे n + 1 = 2 अक्षरांचा क्रम घ्या. ab हा क्रम असूदे. यात, दिलेले नियम पाळून, (ab) या फक्त एकाच प्रकारे कंसजोडी टाकता येईल.

2) n = 2. $\therefore$ n + 1 = 3 अक्षरांचा abc हा क्रम घ्या. त्यात दिलेले नियम पाळून पुढील फक्त 2 च वेगवेगळ्या प्रकारे कंसजोड्या टाकता येतील : (a (bc)), ((ab) c).

3) n = 3. $\therefore$ n + 1 = 4 अक्षरांचा abcd हा क्रम घ्या. त्यात दिलेले नियम पाळून पुढील केवळ पाचच निरनिराळ्या प्रकारे कंसजोड्या टाकता येतील.

((ab) (cd)), (a ((bc) d)), ((a (bc)) d), (((ab) c) d),

(a (b (cd)))

4) n = 4. म्हणजे n + 1 = 5 अक्षरांचा abcde हा क्रम घ्या. त्यात दिलेले नियम पाळून एकूण फक्त 14 च निरनिराळ्या प्रकारे कंस जोड्या टाकता येतील. कंसजोड्या टाकण्याचे हे 14 निरनिराळे प्रकार कोष्टक 3 मध्ये दाखविले आहेत.

कोष्टक 3

((ab) ((cd) e)),	(a ((bc) (de)))	(a (b ((cd)e))),	((((ab)c)d)e),
((ab) (c(de))),	((a(bc))(de)),	(a(b(c(de))))	(((a(bc)) d)e),
(((ab)(cd)) e),	(((ab)c) (de)),	((a((bc)d))e),	((a(b(cd)))e),
		(a(((bc)d)e)),	(a((b(cd))e))

वरील विवेचनावरून आपण पुढील कोष्टक 4 मांडू शकतो. n च्या इतर काही किंमतींसाठी हा प्रश्न सोडवून वाचकांनी हे कोष्टक वाढवावे.

कोष्टक 4

n + 1 अक्षरांचा क्रम घेतला असताना n ची किंमत	1	2	3	4	...
नियमानुसार, घेतलेल्या क्रमात निरनिराळ्या प्रकारे कंसजोड्या घालता येण्याचे एकूण प्रकार	1	2	5	14 (कोष्टक 3)	...

टीप (7) m + 1 अक्षरांच्या क्रमासाठी एकूण m कंस जोड्या लागतात.

5. समस्या 4

n (= 2, 3,4,5,6,...) संख्या घ्या. त्या सर्व ठराविक क्रमाने एकमेकांच्या घातांक स्वरूपात मांडून निरनिराळ्या किती किंमती मिळू शकतील ?

टीप (8) : $(4^2)^3$ व $4^{(2^3)}$ या दोघा मांडणीत, घेतलेल्या 2, 3 व 4 या तीन संख्याचा क्रम तोच म्हणजे 4, 2, 3 हा ठेवला आहे. पण या दोन मांडण्यांच्या किंमती भिन्न भिन्न आहेत. कारण $(4^2)^3 = (16)^3 = 4096$ आणि $4^{(2^3)} = 4^8 = 65536$. घातांक स्वरूपातील निरनिराळ्या मांडण्या निरनिराळ्या किंमती देतात हे नीट ध्यानात असले पाहिजे.

टीप (9) : छापण्याच्या सोयीसाठी 2^3 हे 2 Λ 3 असे दाखविले (लिहिले) जाईल. त्यानुसार $(4^2)^3$ = (4L 2) L 3,आणि $4^{(2^3)}$ = 4L (2 L 3) इत्यादी

टीप (10) : या प्रश्नाच्या उत्तरासाठी घ्यावयाच्या संख्या a,b,c, d अशा आपण घेऊ शकतो. पण आपण प्रत्यक्ष (concrete) संख्या घेऊया.म्हणजे वाचकांना निरनिराळ्या मांडण्यांच्या किंमती प्रत्यक्षात काढता येतील, व त्या खरोखर वेगवेगळ्या आहेत याची खातरजमा करून घेता येईल.

टीप (11) : या प्रश्नाच्या उत्तरासाठी समस्या 3 (वरील उपविभाग 4 मध्ये विवेचिलेल्या) मधील उत्तरांचा उत्तम उपयोग होऊ शकतो. कारण a, b, c, d या 4 संख्या त्याच क्रमाने घातांक स्वरूपात मांडण्याचा एक प्रकार (aΛ b)Λ (cΛ d) हा असू शकतो, आणि या मांडणीसाठी समस्या 3 च्या उत्तरातील ((a b) (c d)) या संबंधित उत्तराचा उपयोग केला आहे हे उघड आहे.

उत्तर (1) n = 2. उदाहरण म्हणून 4 व 3 या दोन संख्या याच क्रमाने घातांक स्वरूपात मांडायच्या आहेत असे समजा. यासाठी आपल्याला 4 Λ 3 ही एकच मांडणी व म्हणून 4 Λ 3 = 64 ही एकच किंमत मिळू शकते हे उघड आहे.

(2) n = 3, या संदर्भात 2,4, व 3 या 3 संख्या याच क्रमाने घातांक स्वरूपात मांडायचे झाल्यास (2 Λ 4)Λ 3 = 2 Λ 12 आणि 2 Λ (4 Λ 3) = 2 Λ 64 या दोनच निरनिराळ्या किंमती मिळू शकतात.

(3) n = 4 या साठी 5,4,2, 3 या चार संख्या घातांक स्वरूपात मांडूया. त्यामुळे

((5 Λ 4) Λ 2) Λ 3 = 5 Λ 24, 5Λ [4 Λ (2 Λ 3)] = 5 Λ 65536,

[5 Λ (4 Λ 2)] Λ 3 = 5 Λ 48,

(5 Λ 4)Λ (2 Λ 3) = 5 Λ 32, 5 Λ [(4 Λ 2) Λ 3] = 5 Λ 4096

या फक्त पाचच निरनिराळ्या किंमती मिळू शकतील.

(4) n = 5. या करिता 3, 2, 4, 2, 3 या पाच संख्या त्याच क्रमाने घातांक स्वरूपात मांडूया. त्यामुळे पुढे दिलेल्या एकूण केवळ 14 निरनिराळ्या मांडण्या मिळू शकतात. त्या निरनिराळ्या आहेत याची खात्री त्यांच्या किंमती काढून वाचकांनी करून घ्यावी. त्याचप्रमाणे या 14 व्यतिरिक्त आणखी निराळी मांडणी (व किंमत) मिळू शकत नाही याचीही खात्री पटवून घ्यावी.

(3 Λ 2) Λ [(4 Λ 2) Λ 3], 3 Λ [(2 Λ 4)Λ (2 Λ 3)],
3 Λ [2 Λ {(4 Λ 2) Λ 3}], [{(3 Λ 2) Λ 4} Λ 2] Λ 3,

(3 Λ 2) Λ [4 Λ (2 Λ 3)], [3 Λ (2 Λ 4)] Λ (2 Λ 3),
3Λ [2 Λ {4 Λ (2 Λ 3)}],

[{3 Λ (2 Λ 4) } Λ 2] Λ 3 [(3 Λ 2) Λ (4 Λ 2)] Λ 3,
[(3 Λ 2) Λ 4]Λ (2 Λ 3),

[3 Λ {(2 Λ 4) Λ 2 }] Λ 3, [3 Λ { 2 Λ (4 Λ 2) }] Λ 3,
3 Λ [{ (2 Λ 4) Λ 2 } Λ 3],3 Λ [{ 2 Λ (4 Λ 2) } Λ 3]

या उत्तरांवरून आपल्याला पुढील कोष्टक 5 मिळते. n च्या पुढील काही किंमतीसाठी वाचकांनी या कोष्टकात भर घालावी.

कोष्टक 5

ठराविक क्रमातील संख्यांची संख्या n	2	3	4	5	.....
क्रम कायम ठेऊन घातांक स्वरूपात मांडणी करण्याने मिळणाऱ्या निरनिराळ्या किमतींची संख्या	1	2	5	14	....

6. समस्या 5

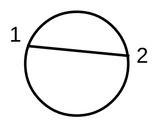
माणसांच्या n (=1, 2, 3, 4, 5,....) जोड्या घ्या. म्हणजे एकूण 2n (=2, 4, 6, 8, 10, ...) माणसे झाली. ही सर्व 2n माणसे वर्तुळाच्या परीघावर वर्तुळाच्या आतील बाजूस तोंड करून उभी आहेत असे समजा. (i) प्रत्येक व्यक्ती दुसऱ्या फक्त एकाच व्यक्तीबरोबर हस्तांदोलन करेल, (ii) सर्व हस्तांदोलने एकाच वेळी होतील, आणि (iii) दोन व्यक्तींमधील हस्तांदोलन दुसऱ्या दोन व्यक्तींमधील हस्तांदोलनास छेदणार नाही (म्हणजेच ती हस्तांदोलने एकमेकांवर येणार नाहीत) या अटी (नियम) पाळल्यास या 2n व्यक्तींमध्ये किती निरनिराळ्या प्रकारे हस्तांदोलने होऊ शकतील ?

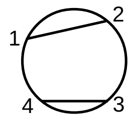
टीप (12) : प्रत्येक व्यक्ती दुसऱ्या फक्त एकाच व्यक्तीशी हस्तांदोलन करीत असल्याने 2n व्यक्तींमध्ये एकूण हस्तांदोलने फक्त n च होतील.

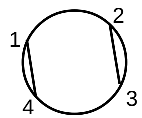
टीप (13) : खाली उत्तरासाठी वापरलेल्या प्रत्येक आकृतीत प्रत्येक व्यक्ती वर्तुळपरीघावर निराळ्या बिंदूने दाखविली आहे. व्यक्तींना क्रमांक दिले आहेत व दोन व्यक्तींमधील हस्तांदोलन संबंधित व्यक्तींना रेषाखंडाने जोडून दाखविले आहे.

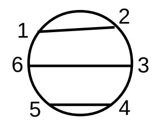
उत्तर : (1) n = 1. म्हणजे एकूण 2 माणसे (आकृती 45). या स्थितीत एकच हस्तांदोलन होऊ शकते हे उघड आहे.

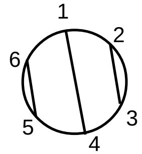
(2) n = 2 म्हणजे एकूण 4 माणसे (1, 2, 3, 4) (आकृती 46 व 47). या परिस्थितीत व्यक्ती 1 व 2 यांच्यामध्ये एक व व्यक्ती 3 व 4 यांच्यामध्ये दुसरे अशी दोन हस्तांदोलने होऊ शकतील. हा झाला एक प्रकार (आवृत्ती 46) किंवा व्यक्ती 1 व 4 यांच्यामध्ये एक व व्यक्ती 2 व 3 यांच्यामध्ये दुसरे अशी दोन हस्तांदोलने होतील व तो होईल दुसरा प्रकार (आकृती 47). अशाप्रकारे n = 2 च्या बाबतीत (म्हणजे 4 माणसे असताना) दिलेल्या अटी पाळून, एकूण फक्त दोनच प्रकारे हस्तांदोलने होऊ शकतात.

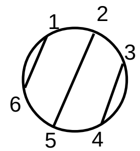

आकृती 45

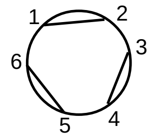

आकृती 46

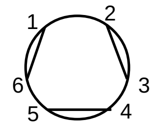

आकृती 47

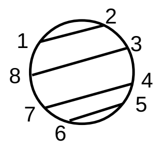

आकृती 48

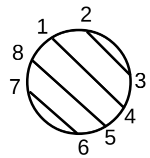

आकृती 49

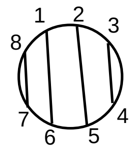

आकृती 50

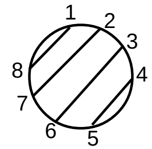

आकृती 51

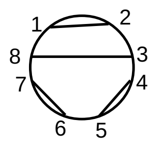

आकृती 52

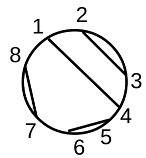

आकृती 53

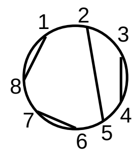

आकृती 54

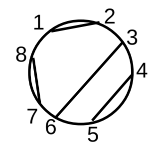

आकृती 55

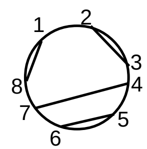

आकृती 56

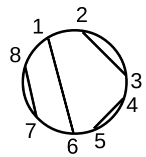

आकृती 57

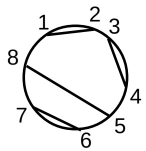

आकृती 58

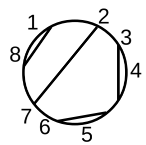

आकृती 59

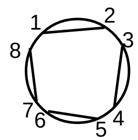

आकृती 60

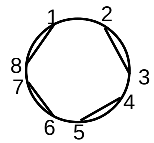

आकृती 61


आकृती 63


आकृती 62


आकृती 64


आकृती 65


आकृती 66

(3) n = 3 म्हणजे एकूण 6 माणसे. दिलेल्या अटी पाळून या बाबतीत एकूण पाच प्रकारे हस्तांदोलने होऊ शकतात. ती आकृत्या 48 ते 52 मध्ये दाखविली आहेत.

(4) n = 4 म्हणजे एकूण 8 माणसे असताना शक्य असणारी सर्व 14 हस्तांदोलने आकृत्या 53 ते 66 मध्ये दाखविली आहेत.

आकृत्या 45 ते 66 वापरून या समस्येच्या उत्तराचे कोष्टक 6 पुढीलप्रमाणे असेल. n च्या आणखीन काही किंमतींसाठी प्रत्यक्ष आकृत्या काढून वाचकांनी हे कोष्टक वाढवावे.

कोष्टक 6

वर्तुळपरीघावरील व्यक्तींच्या जोड्यांची संख्या, n	1	2	3	4	...
प्रश्नातील अटी पाळून होऊ शकणाऱ्या वेगवेगळ्या हस्तांदोलनांची एकूण संख्या.	1 आकृती 45	2 आकृती 46 व 47	5 आकृती 48 ते 52	14 आकृती 53 ते 66	....

7. समस्या 6

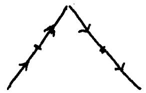
n वरती जाणारे समान लांबीचे तिरकस रेषाखंड (/ या प्रकारचे) व तितकेच (म्हणजेच n) त्याच लांबीचे खाली जाणारे उतरते रेषाखंड (\ या प्रकारचे), (n = 1, 2, 3, 4, 5,...) यांच्या उपयोगाने 'आकृतीची सुरूवात व शेवट, त्या आकृतीच्या सर्वात खालच्या बाजूस स्पर्श करणाऱ्या क्षितिज समांतर (horizontal) रेषेवर झाली पाहिजे' या अटीचे पालन करणाऱ्या एकूण किती निरनिराळ्या आकृत्या काढता येतील ?

टीप (14) : प्रश्नाच्या विधानातील अटीचा अर्थ होतो की ∧∧ अशी आकृती चालेल पण ∨∨ अशी आकृती चालणार नाही.

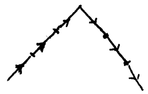
टीप (15) : या प्रश्नाच्या उत्तरातील आकृती डोंगरासारखी दिसेल. म्हणून या प्रश्नाचे पर्यायी विधान असेही होईल : n उर्ध्वगामी व n अधोगामी (n = 1, 2, 3, 4, 5,...) समान लांबीच्या तिरकस रेषाखंडांनी डोंगरांच्या एकूण किती वेगवेगळ्या आकृत्या तयार करता येतील की ज्यात आकृतीच्या सुरूवातीच्या डाव्या बाजूकडून प्रथम डोंगरावर चढावे लागेल आणि आकृतीच्या उजवीकडील शेवटच्या बाजूवरून डोंगरावरून उतरावे लागेल ?

उत्तर : n च्या सुरूवातीच्या चार किंमतींसाठी (म्हणजे n = 1, 2, 3, 4 साठी) प्रत्यक्ष आकृत्या खाली दाखविल्या आहेत : (1) n = 1, एकूण 1च उकल (आकृती 67); (2) n = 2, एकूण 2 उकली (आकृत्या 68 व 69); (3) n = 3, एकूण 5 उकली (आकृत्या 70 ते 74); (4) n = 4 एकूण 14 उकली (आकृत्या 75 ते 88).

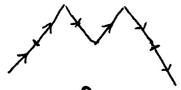

आकृती 67


आकृती 68


आकृती 69

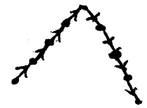

आकृती 70


आकृती 71


आकृती 72


आकृती 73

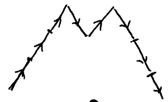

आकृती 74

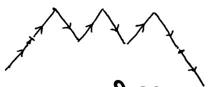

आकृती 75

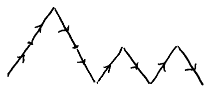

आकृती 76

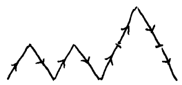

आकृती 77

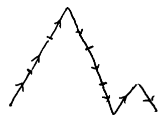

आकृती 78


आकृती 79

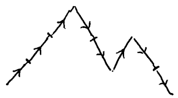

आकृती 80

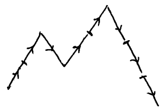

आकृती 81


आकृती 82


आकृती 83


आकृती 84


आकृती 85


आकृती 86


आकृती 87


आकृती 88

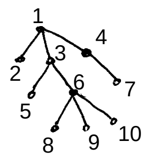
या आकृत्यांवरून या प्रश्नासंबंधित उत्तराचे पुढील कोष्टक 8 तयार होते. वाचकांनी n च्या इतर काही किंमतींसाठी निरनिराळ्या किती डोंगरांच्या आकृत्या काढता येतात ते सापडवून हे कोष्टक वाढवावे.

कोष्टक 8

तिरकस समान लांबीच्या उर्ध्वगामी व अधोगामी रेषाखंडांची प्रत्येकी संख्या,n	1	2	3	4	...
प्रश्नातील अटी पाळून मिळणाऱ्या डोंगरांच्या निरनिराळ्या आकृत्यांची संख्या.	1 आकृती 67	2 आकृती 68 व 69	5 आकृती 70 ते 74	14 आकृती 75 ते 88	... .

8. समस्या 7

पूर्वतयारी : आकृती 89 सारख्या आकृतीला झाड (tree) असे म्हणतात. कारण ही आकृती साधारणतः 1 क्रमांकाचा बिंदू हे मूळ व सर्व रेषाखंड या फांद्या असणाऱ्या झाडासारखी दिसते. या आकृतीत एकूण 10 बिंदू आहेत. सर्वच नव्हे तर काही बिंदू एकमेकांना रेषाखंडांनी जोडलेले आहेत.



आकृती 89

आकृतीतील प्रत्येक बिंदूला (एकूण 10) या झाडाचे शिरोबिंदू (vertex, node) आणि आकृतीतील प्रत्येक रेषाखंडास झाडाची कडा किंवा बाजू (edge) म्हणतात. या आकृतीत (व अशा प्रकारच्या झाडाच्या कोणत्याही आकृतीत) कोणत्याही शिरोबिंदूपासून सुरूवात करून रेषाखंडावरून पुढे पुढे जाऊन सुरूवातीच्या शिरोबिंदूपर्यंत परत येता येत नसेल तर त्या झाडाच्या आकृतीत चक्र (circuit) नाही असे म्हणतात.आकृती 89 मधील झाडात चक्र नाही. आकृती 89 मध्ये 3, 4, 6 क्रमाकांच्या शिरोबिंदूंना त्या झाडाचे अंतर्गत शिरोबिंदू व इतर शिरोबिंदूंना त्या झाडाचे बाह्य शिरोबिंदू म्हणतात. आकृती 89 मध्ये 1 क्रमाकांचा शिरोबिंदू (किंबहुना, तसे पाहता त्यातील कोणताही शिरोबिंदू) आकृतीने दाखविलेल्या झाडाचे मूळ आहे असे मानता येईल. कोणत्याही बिंदूतून निघणारे रेषाखंड (फांद्या) कोणत्याही दिशेला दाखविले तरी चालते. फक्त ते रेषाखंड दुसऱ्या कोणत्या बिंदूंशी जोडले गेले आहेत ते योग्य प्रकारे दाखविले गेले पाहिजे. आकृती 89 मध्ये क्रमांक 1 चा बिंदू मूळ असल्याचे मानून त्या मूळापासून निघून कडावरून पुढे जात असताना क्रमांक 6 च्या बिंदूपासून पुढील बाजूस 3 कडा निघाल्याचे दिसून येते (6 क्रमांकाच्या बिंदूत मिळणाऱ्या एकूण 4 कडा आहेत). झाडाच्या मुळापासून कडांवरून पुढे जात असताना प्रत्येक शिरोबिंदूतून जास्तीत

जास्त 2 कडा निघत असतील तर अशा झाडाला द्विमान झाड (binary tree) म्हणतात. आकृती 89 मधील झाड द्विमान झाड नाही, कारण 1 व 6 क्रमाकांच्या शिरोबिंदूपासून पुढे जाणाऱ्या प्रत्येकी 3 कडा निघत आहेत. झाडाच्या मुळापासून केवळ एक व प्रत्येक अंतर्गत शिरोबिंदूपासून, मुळापासून दूर जाणाऱ्या दोन आणि दोनच कडा निघत असतील तर त्या द्विमान झाडाला 'ज्याला मूळ आहे असे प्रतलीय द्विमान झाड (Rooted plain binary tree)' म्हणतात. या संज्ञेतील 'प्रतलीय' या विशेषणाचा अर्थ असाः एखादे झाड दुसऱ्या झाडाशी सममित (symmetric) असले तरी ती दोन झाडे वेगवेगळी असल्याचे धरले जाते.

उदाहरणार्थ  व  ही दोन झाडे निरनिराळी असल्याचे समजले जाईल. आता

समस्या 7 : एक शिरोबिंदू हा मूळ व n (= 1, 2, 3, 4,...) अंतर्गत शिंरोबिंदू असलेली एकूण किती वेगवेगळी 'ज्याला मूळ आहे अशी प्रतलीय द्विमान झाडे' (rooted plain binary trees) तयार करता येतात ?

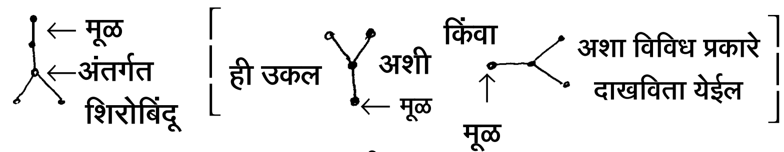
उत्तर : n च्या सुरूवातीच्या चार किंमतींसाठी (म्हणजे n = 1, 2, 3, 4 साठी) हव्या असलेल्या प्रकारच्या झाडांच्या (rooted plain binary trees च्या) आकृत्या खाली काढून उत्तरांच्या संख्या दाखविल्या आहेतः

(1) n = 1 अंतर्गत शिरोबिंदू : केवळ 1 च उकल (आकृती 90)

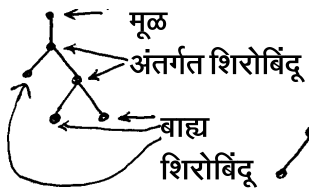
(2) n = 2 अंतर्गत शिरोबिंदू : एकूण 2 उकली; (आकृती 91 व 92);

(3) n = 3 अंतर्गत शिरोबिंदू : एकूण 5 उकली (आकृत्या 93 ते 97);

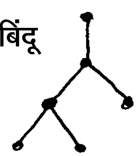
(4) n = 4 अंतर्गत शिरोबिंदू : एकूण 14 उकली (आकृत्या 98 ते 111).

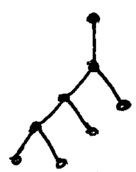


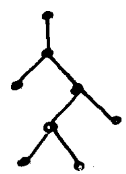
आकृती 90

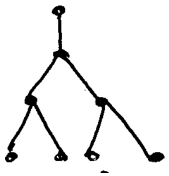


आकृती 91

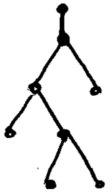

आकृती 92


आकृती 93

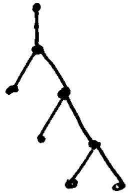

आकृती 94



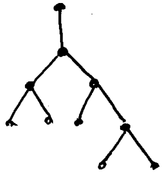
आकृती 95



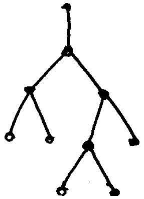
आकृती 96



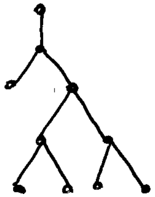
आकृती 97



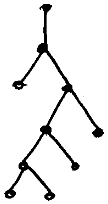
आकृती 98



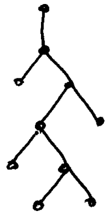
आकृती 99



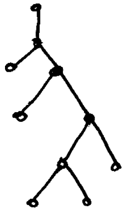
आकृती 100



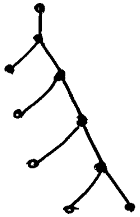
आकृती 101



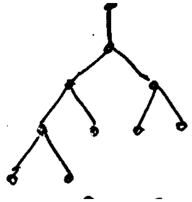
आकृती 102



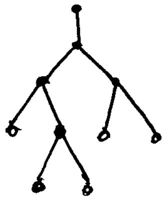
आकृती 103



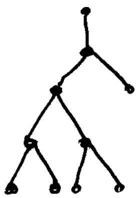
आकृती 104



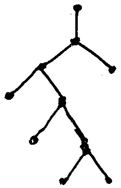
आकृती 105



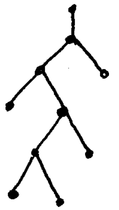
आकृती 106



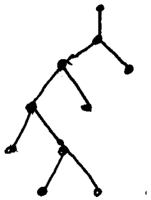
आकृती 107



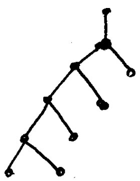
आकृती 108



आकृती 109



आकृती 110



आकृती 111

टीप (16) : आकृती 105 ते 111 या अनुक्रमे आकृती 98 ते 104 यांची प्रतलीय आरशातील प्रतिबिंबे आहेत याची नोंद वाचकांनी घ्यावी. म्हणजेच आकृत्या 105 ते 111 अनुक्रमे आकृत्या 98 ते104 यांच्याशी सममित आहेत. आकृत्या 90 ते 111 यांवरून या प्रश्नाच्या उकलींबद्दलचे कोष्टक 9 असे दिसेल :

कोष्टक 9

अंतर्गत शिरोबिंदूंची संख्या n	1	2	3	4	....
ज्याला मूळ आहे अशा प्रतलीय द्विमान झाडांची संख्या	1 आकृती 90	2 आकृती 91व 92	5 आकृती 93 ते 97	14 आकृती 98 ते 111	....

n च्या पुढील काही किंमतीसाठी वाचकांनी कोष्टक 9 मध्ये भर घालावी.

9. समस्या 8

एक मूळ व n (= 1, 2, 3, 4,) कडा (फांद्या) असलेली निरनिराळी एकूण किती प्रतलीय झाडे असतील ?

उत्तर : n च्या सुरूवातीच्या 4 किंमतींसाठी (म्हणजे n = 1, 2, 3, 4 साठी) इच्छित प्रकारच्या झाडांच्या प्रत्यक्ष आकृत्या काढून उकलींची संख्या शोधली आहे :

1) n = 1 कडा असलेले झाड : फक्त एक उकल (आकृती 112);
2) n = 2 कडा असलेली झाडे : एकूण दोन उकली (आकृती 113 व 114);
3) n = 3 कडा असलेली झाडे : एकूण 5 उकली (आकृती 115 ते 119);
4) n = 4 कडा असलेली झाडे : एकूण 14 उकली (आकृती 120 ते 133) :

टीप (17) : झाडाच्या मूळ असलेल्या शिरोबिंदूभोवती, त्याचे निराळेपणा दाखविण्यासाठी, वर्तुळ काढले आहे.



आकृती 112



आकृती 113



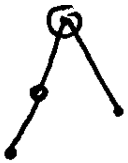
आकृती 114



आकृती 115



आकृती 116



आकृती 117



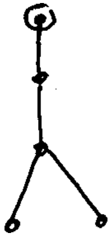
आकृती 118



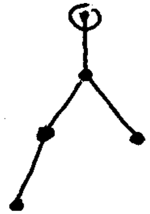
आकृती 119



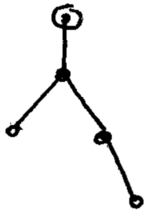
आकृती 120



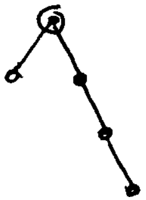
आकृती 121



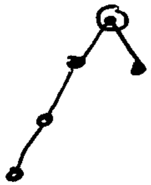
आकृती 122



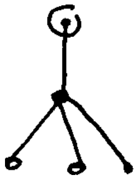
आकृती 123



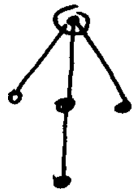
आकृती 124



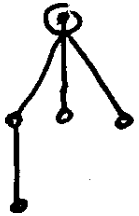
आकृती 125



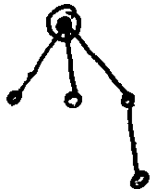
आकृती 126



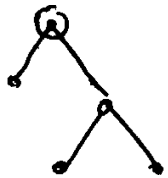
आकृती 127



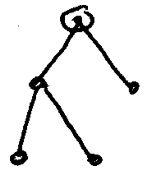
आकृती 128



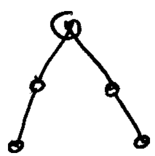
आकृती 129



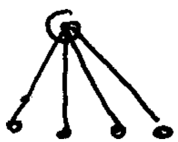
आकृती 130



आकृती 131



आकृती 132



आकृती 133

आकृत्या 112 ते 133 च्या उपयोगाने या समस्येच्या उत्तरांचे कोष्टक 10 पुढे दिले आहे. n च्या आणखी काही किंमतींसाठी वाचकांनी आकृत्या काढून हे कोष्टक 10 आणखी वाढवावे.

कोष्टक 10

झाडाच्या फांद्यांची संख्या, n	1	2	3	4	.....
n फांद्या असलेल्या वेगवेगळ्या प्रकारच्या प्रतलीय झाडांची संख्या	1 आकृती 112	2 आकृती 113व114	5 आकृती 115 ते 119	14 आकृती 120ते 133	....

10. समान उत्तरांचे सूत्र :

या लेखात वर्णिलेल्या व चर्चिलेल्या आठ निरनिराळ्या प्रश्नांची उत्तरे समान मिळाली. ज्या अर्थी इतक्या विविध प्रकारच्या प्रश्नांची उत्तरे समान मिळतात त्याअर्थी त्यांचे एक सूत्र असले पाहिजे असे मनाला वाटून राहते. आठही प्रश्नांची उत्तरे म्हणून 1, 2, 5, 14 या ज्या संख्या पुढे आल्या त्या एका सुप्रसिद्ध क्रमातील संख्या आहेत. त्या क्रमाचे सूत्र आहे :

$$\frac{1}{n+1}\ {}^{2n}C_n,\ n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... \qquad .... (A)$$

या सूत्रात n च्या 1, 2, 3, 4 या किंमती घातल्यास आपल्याला 1, 2, 5, 14 या संख्या मिळतील. या सूत्रात n च्या 1 पासून चढत्या क्रमाने पूर्णांक किंमती ओळीने घातल्यावर मिळणाऱ्या सुरुवातीच्या संख्या या आहेत:

1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, 742900, 2674440, ...(B)

आपण वरील आठपैकी कोणतेही प्रश्न त्यातील लागू होणाऱ्या n च्या पुढील किंमतींसाठी सोडवले व उत्तरांच्या त्या त्या कोष्टकात भर घालीत गेलो तर मिळणारी उत्तरे (B) या क्रमाप्रमाणे असतील.

(A) ने दिलेल्या क्रमाचे (ज्यातील सुरुवातीच्या 14 संख्या (B) मध्ये दिल्या आहेत) नाव आहे कॅटलान क्रम (Catalan sequence), आणि त्यातील संख्यांना म्हणतात कॅटलान संख्या. म्हणजे (B) मधील संख्या या सुरुवातीच्या कॅटलान संख्या आहेत. कॅटलान संख्या तयार करण्याचे सूत्र (A) मध्ये दिले आहे व त्याला कॅटलान क्रमाचे जनकसूत्र म्हणतात.

काही गणिती या कॅटलान क्रमात सुरूवातीला आणखीन एक 1 आहे असे मानतात. (A) मधील सूत्रात n = 0 घातल्यास तो जादा 1 ही मिळतो. त्यानुसार (A) मध्ये उद्धृत केलेल्या n च्या किंमती n = 0, 1, 2, 3, 4, ... अशा घ्यायला हरकत नाही.

11 समारोप :

या लेखात आपण 8 वेगवेगळ्या प्रकारचे प्रश्न सोडविले. पहिला प्रश्न सुसम n - भुजाकृतीचे n - 2 त्रिकोणात विभाजन करण्याचा होता. दुसरा प्रश्न आलेखावर एका बिंदूपासून दुसऱ्या बिंदूकडे मार्गक्रमण करण्याचा होता. तिसरा प्रश्न अक्षरांच्या क्रमामध्ये कंस जोड्या घालण्याचा होता. चौथा प्रश्न संख्याचा क्रम घातांक स्वरूपात मांडण्याचा होता. पाचवा प्रश्न वर्तुळावर उभ्या राहीलेल्या व्यक्तींनी हस्तांदोलन करण्याचा होता. सहावा प्रश्न तिरक्या रेषाखंडांनी डोंगर-आकृती काढण्याचा होता. सातवा प्रश्न ठरावीक अंतर्गत शिरोबिंदू असलेली प्रतलीय द्विमान झाडे काढण्याचा होता. आठवा प्रश्न फांद्यांची ठरावीक संख्या असलेल्या झाडांची संख्या ओळखण्याचा होता. प्रत्येक प्रश्नात त्या त्या प्रश्नाशी निगडीत नियम (अटी) देखील होत्या. या आठही प्रश्नांचा तसा अर्थाअर्थी काही संबंध नाही. तरीही प्रत्येक प्रश्नात n च्या ओळीने लागू होणाऱ्या किंमतीसाठी उत्तरे तीच म्हणजे क्रमाने 1, 2, 3, 14 हीच मिळाली. या सर्व प्रश्नात n च्या क्रमाने येणाऱ्या पुढील किंमतीसाठीही उत्तरे समानच येतात हे गणिताने दाखविता येते व प्रत्यक्ष रचना करूनही पाहता येते. वाचकांनी तो पडताळा अवश्य घ्यावा. आणखीनही काही प्रश्न असतील की ज्यांची उत्तरे देखील वरील आठ प्रश्नांप्रमाणेच असतील. साधर्म्य नसणाऱ्या निरनिराळ्या प्रश्नांच्या बाबतीत उत्तरे तीच असणे हे गणितात आढळणारे एक वैशिष्ट्य आहे आणि म्हणून अशा निरनिराळ्या प्रश्नांच्या वरवरच्या बारकाव्यांकडे फारसे लक्ष न देता गणिताचा अमूर्तस्वरूपात अभ्यास करण्याकडे गणितज्ञांचा कल असतो.

भिन्न भिन्न अनेक प्रश्नांचे एकच समान उत्तर असावे ही केवढी मौज आणि ते उत्तर एखाद्या कमाच्या (sequence च्या) सदस्यांनी दिले जावे ही केवढी आनंदाची, समाधानाची व भाग्याची गोष्ट आहे. हा सर्व उलगडा गणिताच्या अभ्यासाने होतो हेही केवढे आश्चर्य ! म्हणूनच गणिताच्या अभ्यासाने मिळणारे सुख अवर्णनीय व कालातीत आहे. ते सुख सर्वांनी लुटावे हे सांगायला हवे का ?

☆ ☆ ☆

**

विविध संकल्पनांच्या वैकल्पिक (alternative) व्याख्या

1. विषय प्रवेश :

गणितात आपण निरनिराळ्या व्याख्या शिकतो. नवी संकल्पना जाणून घेण्यासाठी तिची व्याख्या हवीच. त्रिकोण म्हणजे काय हे समजण्यासाठी त्याची व्याख्या करण्याशिवाय दुसरा उत्तम मार्ग नाही. आकृती काढण्याने किंवा वर्णन करण्याने संकल्पनेची पूर्ण व अचूक कल्पना येईलच असे नाही. त्रिकोणाची संकल्पना नीट समजली की मग समभुज त्रिकोण, समद्विभुज त्रिकोण, काटकोन त्रिकोण, असे त्याचे विविध प्रकार जाणून घ्यावे लागतात. त्या प्रत्येकाचे दुसऱ्यापासूनचे निराळेपण जाणून घेण्यासाठी त्या प्रत्येक प्रकाराची सुस्पष्ट व्याख्या करावी लागते. त्याचप्रमाणे समांतर रेषा, मूळसंख्या, विभाजक, विषम पूर्णांक इत्यादि अनेक संज्ञांच्या व्याख्या आपल्याला अभ्यासाव्या लागतात. गणितात, किंबहुना कोणत्याही विषयात व्याख्यांना खूप महत्त्व आहे, कारण व्याख्या नीट समजल्या तरच त्या विषयाच्या पुढील भागाचे आकलन होणे सोपे जाते.

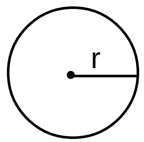
काही संकल्पनांच्या एकाहून अधिक व्याख्या असू शकतात. अर्थात, एखाद्या संकल्पनेची तिच्या एका व्याख्येमुळे आपल्या मनात व बुद्धीत निर्माण झालेली प्रतिमा व त्याच संकल्पनेच्या दुसऱ्या एखाद्या व्याख्येकडून उत्पन्न झालेली समज या तंतोतंत जुळायला हव्यात. कारण निरनिराळ्या प्रकारे व्यक्त केली तरी संकल्पना मूलतः एकच असते. म्हणजेच कोणत्याही संकल्पनेच्या वेगवेगळ्या व्याख्या समतुल्य (equivalent) हव्यात. आपल्या गणिताच्या नेहमीच्या वापरातील काही संकल्पनांच्या प्रत्येकी दोन अगर अधिक व्याख्या आपण या लेखात बघणार आहोत.

2. वर्तुळ

वर्तुळ ही आपल्या नेहमीच्या परिचयाची संकल्पना आहे. वर्तुळाची जास्त प्रचारात असलेली प्रसिद्ध व्याख्या अशी आहे.

दिलेल्या बिंदूपासून एकाच प्रतलात समान अंतरावर असणाऱ्या सर्व बिंदूंना मिळून (म्हणजेच त्या सर्व बिंदूंच्या संचाला) वर्तुळ म्हणतात. ....(D1)

टीप (1) : अर्थात त्या दिलेल्या बिंदूला त्या वर्तुळाचा केंद्रबिंदू व त्या समान अंतराला त्या वर्तुळाची त्रिज्या म्हणतात याचीही आपण नोंद करतो.

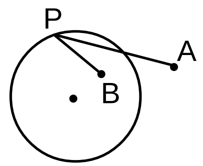


आकृती 1

वर्तुळाची दुसरी (वैकल्पिक) व्याख्या पुढीलप्रमाणे केली जाते व ती प्रथम अपोलोनिअस यांनी दिली असे समजले जाते.

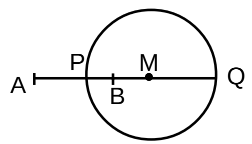
दिलेल्या दोन बिंदूंपासून असलेल्या आपल्या अंतरांचे गुणोत्तर सतत कायम ठेवून एकाच प्रतलात फिरणाऱ्या बिंदूंचा बिंदूपथ (locus) म्हणजे वर्तुळ. ...(D2)

(आकृती 2 मध्ये A व B हे दिलेले दोन बिंदू असून P सारख्या वर्तुळाच्या प्रत्येक बिंदूसाठी PA/PB हे गुणोत्तर समान असेल.)



आकृती 2

आता व्याख्या (D2) नुसार दोन बिंदू A व B, आणि PA/PB हे गुणोत्तर दिले असता तयार होणारे वर्तुळ (जो P या बिंदूचा बिंदूपथ असतो) नक्की कसे करावयाचे ते उदाहरणाने पाहू या.



आकृती 3

पक्ष : A व B हे बिंदू व P या बिंदूसाठी PA/PB = 2/1 घ्या.

साध्य : P चा बिंदूपथ (जो व्याख्येप्रमाणे वर्तुळ असेल) नक्की करणे.

रचना : A व B या बिंदूना जोडणाऱ्या सरळ रेषेवरच हव्या असलेल्या वर्तुळाचा व्यास पडेल असे पाहूया.

AB हा रेषाखंड B च्या बाजूस वाढवून त्यावर Q हा बिंदू असा घ्या की BQ = AB .... (3)

त्यामुळे $\dfrac{QA}{QB} = \dfrac{QB + BA}{QB} = \dfrac{AB + BA}{AB}$, [(3) वापरून]

= 2/1 .... (4)

AB वर P हा बिंदू असा घ्या की PA = $\dfrac{2}{3}$ AB

$$\therefore \quad \frac{PA}{PB} = \frac{(2/3)\ AB}{(1/3)\ AB} = \frac{2}{1} \qquad (5)$$

म्हणजे सर्वसाधारण (general) रचना अशी : AB ला P आतल्या बाजूस व Q बाहेरच्या बाजूस दिलेल्या गुणोत्तरात विभागूदेत.

[(4) व 5)] ⇒ वर्तुळाच्या व्याख्या (D2) नुसार P व Q हे दोन्ही बिंदू हव्या असलेल्या वर्तुळावर आहेत. .... (6)

A, P, B, Q हे एकाच सरळ रेषेवर असून P व Q हे AB ला त्याच गुणोत्तरात अनुक्रमे आतल्या बाजूस व बाहेरच्या बाजूस विभागत आहेत. .... (7)

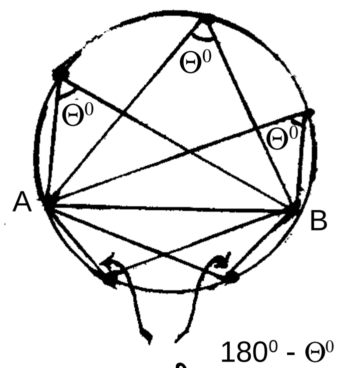
[(6) व (7)] ⇒ PQ हा इष्ट वर्तुळाचा व्यास आहे.

M हा PQ चा मध्यबिंदू घ्या. M हा केंद्रबिंदू व MP = MQ ही त्रिज्या असलेले वर्तुळ हे इष्ट वर्तुळ असेल.

टीप (2) : अशातऱ्हेने A, B, हे दोन बिंदू आणि PA/PB हे गुणोत्तर दिले असता या माहितीने नक्की केलेले वर्तुळ (व्याख्या (D2) नुसार) वरील रचनेने मिळविता येते.

वर्तुळाची तिसरी व्याख्या अशी देता येईल :

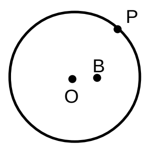
दिलेल्या AB या रेषाखंडाच्या दोन टोकांना रेषाखंडांनी जोडले असता होणारा कोन, AB च्या एका बाजूकडील ज्या ज्या बिंदूंच्या बाबतीत समान (समजा Θ^0) असतो, आणि AB च्या दुसऱ्या बाजूकडील ज्या ज्या बिंदूंच्या बाबतीत $180^0 - \Theta$ असतो अशा सर्व बिंदूंच्या संचाला वर्तुळ म्हणतात. ....(D8)



आकृती 4

टीप (3) : वर्तुळासंबंधातील महत्त्वाची सर्व प्रमेये सिद्ध करण्यासाठी ही व्याख्या अधिक थेटपणे (directly) उपयोगाला येते. त्या मानाने वर्तुळाच्या नेहमीच्या { म्हणजे वरील (D1) } व्याख्येचा संबंध त्या प्रमेयांशी अधिक दूरान्वयाने येतो. त्यामुळे वर्तुळाचा या व्याख्येत अंतर्भूत असणारा गुणधर्म वर्तुळाची व्याख्या म्हणून घेण्यास योग्य वाटतो.

टीप (4) : एखाद्या संज्ञेची कोणतीही व्याख्या ही त्या संज्ञेचा एखादा गुणधर्मच असतो. वर्तुळाच्या वरीलपैकी प्रत्येक व्याख्येमध्ये वर्तुळाचा एकेक वेगवेगळा गुणधर्म वापरला आहे. कोणत्याही संज्ञेच्या व्याख्येच्या बाबतीत, व्याख्येसाठी घेतलेला गुणधर्म व त्याचा व्यत्यास हे दोन्ही सत्य असतात. कोणत्याही लिखाणातील व त्याचप्रमाणे या लेखातील व्याख्यांच्या बाबतीत हे अर्थातच खरे आहे.



आकृती 5

टीप (5) : व्याख्या (D1) किंवा (D2) किंवा (D8) चे नीट आकलन केल्यास हे लक्षात येईल की व्याख्येत उल्लेखिलेले सर्व बिंदू [व्याख्या (D1) मधील दिलेल्या बिंदूपासून समान अंतरावर असणारे, आणि व्याख्या (D2) मधील दिलेल्या दोन बिंदूंपासून असलेल्या आपल्या अंतरांचे, गुणोत्तर सतत कायम ठेवून फिरणाऱ्या बिंदूंचा बिंदूपथ, तसेच व्याख्या D8 मधील बिंदूसंच] हे त्या वर्तुळाच्या परिघावर असतात. अशातऱ्हेने फक्त परिघावरील सर्व बिंदूंना मिळून एकत्रितपणे वर्तुळ म्हणतात. आकृती 5 मध्ये P हा त्या वर्तुळाचा बिंदू आहे पण परिघाच्या आतील कोणताही बिंदू (B सारखा अथवा केंद्रबिंदू O हा देखील) त्या वर्तुळाचा भाग नाही. (उपमा द्यायची तर असे म्हणता येईल : ज्याप्रमाणे एखादा माणूस जो सदरा घालतो तो त्या माणसाचा भाग नसतो. तो सदरा त्या माणसाचा असतो इतकेच, पण तो त्या माणसाचा भाग नसतो, त्याचप्रमाणे O हा आकृती 4 मधील वर्तुळाचा केंद्रबिंदू आहे पण तो त्या वर्तुळाचा भाग नाही. वर्तुळ म्हणजे फक्त त्याच्या परिघावरील सर्व बिंदूंचा संच)

3. मूळसंख्या (किंवा अविभाज्य संख्या) :

मूळसंख्या ही गणितातील खूपच महत्त्वाची आणि गणितज्ज्ञांची प्रिय संकल्पना आहे. मूळसंख्येची जास्त प्रचारात असलेली व्याख्या अशी :

1 वगळता जो धन पूर्णांक 1 व तो पूर्णांक यांच्या व्यतिरिक्त इतर कोणत्याही धन पूर्णांकाने नि:शेष भागला जात नाही (किंवा ज्या धन पूर्णांकाचे 1 व तो पूर्णांक यांच्या शिवाय दुसरे कोणतेही धन अवयव नसतात) त्या धन पूर्णांकाला मूळसंख्या म्हणतात. ....(D9)

मूळसंख्येची दुसरी व्याख्या अशी आहे.

1 वगळता ज्या धन पूर्णांक p ला 1, -1, p, -p या चार पूर्णांकांव्यतिरिक्त इतर कोणत्याही पूर्णांकाने नि:शेष भाग जात नाही (म्हणजेच ज्या धन पूर्णांक p चे 1, -1, p, -p या चारी व्यतिरिक्त दुसरे कोणतेही अवयव नसतात), त्या धन पूर्णांक p ला मूळसंख्या म्हणतात. ....(D10)

(D9) व (D10) या व्याख्यांची समतुल्यता स्पष्ट आहे. (D9) मध्ये ''धनपूर्णांकाने'' व 'धन अवयव' असा स्पष्ट उल्लेख आहे. (D10) मध्ये नुसतेच 'पूर्णांकाने' व 'अवयव' असे म्हटले आहे त्यामुळे व्याख्यांच्या विधानात फरक आहे.

मूळसंख्येची तिसरी व्याख्या पुढीलप्रमाणे दिली जाते.

ज्या धन पूर्णांकाला 1 शिवाय त्याच्याहून लहान एकही धन अवयव नसतो त्या धनपूर्णांकाला मूळसंख्या म्हणतात. ....(D11)

(D11) या व्याख्येत 'त्याच्याहून लहान अवयव' विचारात घ्यायचा असल्याने (D9) या व्याख्येत उल्लेखिल्याप्रमाणे 1 समवेत 'तो पूर्णांक' ही अवयव आहे का हे पाहण्याची आवश्यकता नाही. त्याचप्रमाणे (D9) च्या सुरूवातीस सांगितल्यानुसार '1 वगळता' असा उल्लेख (D11) मध्ये करण्याची जरूर नाही कारण कोणत्याही धन पूर्णांकाचा 1 पेक्षा लहान धन अवयव नसतोच.

टीप (6) : बरेच विद्यार्थी व मुलाखतीस आलेले उमेदवार (D9) किंवा (D10) ही व्याख्या देताना '1 वगळता' याचा उल्लेख करण्यास विसरतात. त्यामुळे व्याख्या (D11) ही अधिक चांगली वाटते.

4. सापेक्ष मूळसंख्या (relatively prime numbers किंवा coprimes) :

सापेक्ष मूळसंख्यांची एक व्याख्या अशी आहे :

जर दोन धनपूर्णांकामध्ये $\pm$ 1 व्यतिरिक्त एकही समान अवयव नसेल तर त्या धनपूर्णांकांना (एकमेकांशी) सापेक्ष मूळसंख्या म्हणतात. ....(D12)

उदाहरणार्थ, 7 व 12 या सापेक्ष मूळसंख्या आहेत. 9 व 25 याही सापेक्ष मूळसंख्या आहेत. तसेच 15 व 28 याही सापेक्ष मूळसंख्या आहेत. कोणत्याही दोन मूळसंख्या या साहजिकच (एकमेकांशी) सापेक्ष मूळसंख्या असतात.

सापेक्ष मूळसंख्यांची आणखी एक व्याख्या अशी आहे :

ज्या दोन धनपूर्णांकांचा मसावि 1 आहे त्या दोन धनपूर्णांकांना (एकमेकांशी) सापेक्ष मूळसंख्या म्हणतात. ....(D13)

ज्या धन पूर्णांकांमध्ये $\pm$ 1 व्यतिरिक्त एकही समान अवयव नसतो त्यांचा मसावि 1 हाच असतो. त्यामुळे (D12) व (D13) या दोन्ही व्याख्या समतुल्य आहेत हे स्पष्ट होते.

टीप (7) : सापेक्ष मूळसंख्यांचा (D12) मध्ये एक गुणधर्म दिला आहे, व (D13) मध्ये त्याच संकल्पनेचा दुसरा गुणधर्म दिला आहे. वर सांगितल्याप्रमाणे कोणत्याही संज्ञेची व्याख्या ही त्या संज्ञेचा एखादा गुणधर्मच असतो. परिशिष्टातही मूळ संख्यांबद्दल आणखी व्याख्या दिल्या आहेत.

5. परिमेय संख्या (Rational number)

शाळेत पूर्णांकांनंतर आपण अपूर्णांक शिकतो. ज्याला अंश व छेद आहेत तो अपूर्णांक; मग अंशात व छेदात कोणतीही संख्या असो. त्यामुळे प्रत्येक अपूर्णांक हा परिमेय संख्या असेलच असे नाही,

(उदाहरणार्थ, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{3}$, $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

हे अपूर्णांक आहेत पण त्या परिमेय संख्या नाहीत)

परिमेय संख्येत अंश व छेद दोन्ही पूर्णांकच असतात; अर्थात छेद शून्य कधीच नसतो. परिमेय संख्येची शाळेत सुरूवातीला शिकविली जाणारी व्याख्या ही आहे :

जी संख्या p/q या स्वरूपात मांडता येते व ज्यात p व q हे दोन्ही पूर्णांक असून $q \neq 0$ तिला परिमेय संख्या म्हणतात. ....(D14)

परिमेय संख्येची वैकल्पिक व्याख्या अशी देता येते.

दशांश पद्धतीने मांडली असता ज्या संख्येतील पूर्णांकापाठोपाठ येणाऱ्या दशांश चिन्हानंतर येणाऱ्या अपूर्णांक भागातील अंकांमध्ये सुरुवातीपासून किंवा काही अंकांनंतर अंकांचा एक समूह सारखा त्याच क्रमाने एका पाठोपाठ पुन्हा पुन्हा अनंतापर्यंत येत राहतो, त्या संख्येला परिमेय संख्या म्हणतात..(D15)

उदाहरणार्थ,

i) x = 0.31712712712712....... यात दशांश चिन्हानंतर 31 हे दोन अंक येतात व त्यानंतर 712 हा अंकसमूह त्याच क्रमाने एकापाठोपाठ अनंतापर्यंत सारखा येत राहतो. 712 पुन्हा पुन्हा अनंतवेळा येतो हे त्याच्यावर आडवी रेघ लिहून दाखविले जाते. म्हणजे $x = 0.31\overline{712}$.

ii) $y = 2.\overline{5818}$ या संख्येत दशांश चिन्हानंतर लगेचच 5818 हा अंकसमूह त्याच क्रमाने एका पाठोपाठ पुन्हा पुन्हा अनंतापर्यंत येत राहतो.

परिमेय संख्येच्या (D14) व (D15) या व्याख्या समतुल्य आहेत हे पटण्यासाठी p/q स्वरूपातली परिमेय संख्या, आणि (D 15) मध्ये सांगितलेला गुणधर्म पाळणारी दशांश स्वरूपातली परिमेय संख्या एकमेकात बदलता आल्या पाहिजेत. ते कसे करतात ते उदाहरणांनी पाहूया.

(1) वरील x व y या संख्या (व त्याचप्रमाणे लिहिली गेलेली कोणतीही परिमेय संख्या) (D14) मध्ये अपेक्षिल्याप्रमाणे p/q स्वरूपात बदलता येतात ते असे...

i) $x = 0.31712712712....$

$\therefore 100\,x = 31.712712712....$ ....(16)

व $100000\,x = 31712.712\ 712\ 712....$ ....(17)

(17) मधून (16) वजा करून

$99900\,x = 31681$

$\therefore x = \frac{31681}{99900}$

(ii) $y = 0.581858185818.....$ ....(18)

$\therefore 10000\,y = 5818.5818\ 5818\ 5818.....$ ....(19)

(19) मधून (18) वजा करून

$9999\,y = 5818$

$\therefore y = \frac{5818}{9999}$

(16) व (17) दोन्ही मध्ये दशांश चिन्हानंतर येणारे अंक (अनंतापर्यंत) तेच आहेत व म्हणून वजाबाकी केल्यावर ते रद्द होतात व फक्त पूर्णांक भाग उरतो. तशीच स्थिती (19) - (18) या वजाबाकीचीही आहे.

या प्रकारे (D15) मध्ये वर्णिलेली दशांश स्वरूपातली परिमेय संख्या p/q स्वरूपात कशी बदलायची हे आपण (16) ते (19) मध्ये बघितले. या उलट p/q (ज्यात p व q हे पूर्णांक, $q \neq 0$) स्वरूपातली परिमेय संख्या दशांश स्वरूपात कशी बदलायची हे बघूया. त्यासाठी q ने p ला भागायचे. उदाहरणार्थ

(iii) $\frac{13}{7}$: 7) 13 (1.8571428.....

```
7) 13 (1.8571428.....
 - 7
  60
- 56
  40
 - 35
   50
  - 49
    10
   - 7
    30
  - 28
    20
  - 14
    60
     .
     .
```

(iv) $\frac{3}{8}$

```
8)  3 ( 0.375
  - 24
    60
  - 56
    40
  - 40
     0
```

$\therefore \frac{3}{8} = 0.375$

$= 0.3750000....$

$= 0.375\overline{0}$

$\therefore \frac{13}{7} = 1.85714285714.... = 1.\overline{857142}$

या (i) ते (iv) उदाहरणांवरून (D14) व (D15) या व्याख्या समतुल्य असल्याचे दिसून येते.

टीप (8) : (a) (i) मधील x च्या $0.31\overline{712}$ किंमतीतील 712 या अंकसमुहाला x चे (3 लांबी असलेले) चक्र (Cycle) म्हणतात. त्याचप्रमाणे 5818 हे (ii) मधील y चे 4 लांबी असलेले चक्र आहे. (iii) वरून13/7 = $1.\overline{857142}$ चे चक्र 857142 असून त्याची लांबी 6 आहे. (iv) वरून 3/8 = $0.375\overline{0}$ चे चक्र एक लांबी असलेले 0 हे आहे. चक्राची लांबी म्हणजे ज्या अंकसमुहाची पुनरुक्ती होते त्यातील अंकांची संख्या

(b) "p/q या परिमेय संख्येची दशांश पद्धतीने मांडणी केली की त्यातील चक्र जास्तीत जास्त q - 1 लांबीचे असू शकते'' हे गणितातील एक प्रमेय आहे. उदाहरणार्थ, वरील उदाहरण (iii) मध्ये $\frac{13}{7} = 1.\overline{857142}$

यात चक्राची लांबी जास्तीत जास्त शक्य असते तेवढी म्हणजे q - 1 = 6 आहे. उदाहरण (i), (ii). (iv) मधील प्रत्येकात चक्राची लांबी अनुक्रमे 3,4, व 1 आहे. त्यांत कोणत्याही चक्राची लांबी जास्तीत जास्त शक्य असते तेवढी नाही.

(c) दुसरे प्रमेय असे सांगते की, : ''परिमेय संख्येच्या दशांश मांडणीतील चक्राच्या लांबीचे सूत्र आहे : जर q हा 2 वा 5 च्या पूर्ण पटीत नसेल तर $10^e - 1$ मधील e या घातांकाची लहानात लहान किंमत की ज्यामुळे $10^e - 1$ ला q ने नि:शेष भाग जातो''. उदाहरणार्थ, $\frac{13}{7}$ साठी चक्राची लांबी 6 आहे कारण

9, 99, 999, 9999, 99999 पैकी कोणालाही 7 ने नि:शेष भाग जात नाही पण $10^6 - 1 = 999999$ ला 7 ने नि:शेष भाग जातो.

$\frac{999999}{7} = 142857$. $\frac{3}{8}$ च्या बाबतीत 8 हा छेद 2 च्या पूर्ण पटीत असल्याने $\frac{3}{8}$ साठी हे सूत्र लागू होत नाही. x = $\frac{31681}{99900}$ च्या बाबतीत देखील वरील सूत्र लागू पडत नाही, कारण छेद 99900 हा 2 व 5 च्या पूर्ण पटीत आहे. $\frac{5818}{9999}$ च्या बाबतीत चक्राची लांबी 4 आहे. कारण $10^1 - 1$, $10^2 - 1$, $10^3 - 1$ ला 9999 ने निशे:ष भाग जात नाही. पण $10^4 - 1 = 10000 - 1 = 9999$ ला छेद 9999 ने नि:शेष भाग जातो.

6. क्रमगुणित (factional)

क्रमगुणित (n) ची एक व्याख्या आहे [क्रमगुणित (n) साठी n ! हे संकेतन वापरुन] :

$$\left.\begin{aligned} \text{क्रमगुणित } (n) &= n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times (n-1) \times n \\ &= n (n-1)(n-2) \dots 2 \times 1 \end{aligned}\right\} \dots\dots (D20)$$

ही व्याख्या हे सांगते की n हा धनपूर्णांक असताना n ! म्हणजे पहिल्या n नैसर्गिक संख्यांचा गुणाकार. उदाहरणार्थ, 5 ! = 1 x 2 x 3 x 4 x 5 = 120, 6 ! = 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 6 (5!) = 6 (120) = 720

शून्य या पूर्णांकासाठी 0 ! = 1 घेण्याची प्रथा पाळली जाते.

क्रमगुणित (n) = n ! ची दुसरी व्याख्या आहे : n हा ऋणेतर पूर्णांक असल्यास

$$\left.\begin{aligned} & n! = (n-1)! \times n \\ \text{व } \; & 0! = 1 \end{aligned}\right\} \dots\dots (D21)$$

(D 21) च्या उपयोगाने 4! ची किंमत पुढीलप्रमाणे मिळविली जाईल.

$4! = 3! \times 4 = (2! \times 3) \times 4 = [(1! \times 2) \times 3] \times 4 = [\{0! \times 1\} \times 2] \times 3 \times 4$

$= 1 \times 1 \times 2 \times 3 \times 4$, [व्याख्येतील $0! = 1$ चा उपयोग करून)]

$= 24$

(D20) व (D21) या n! च्या दोन्ही व्याख्या समतुल्य आहेत हे उघड आहे. (n-1) ! ची किंमत 1 x 2 x 3 x 4 x ...... x (n -1) असल्याने त्याला n ने गुणल्यावर n! मिळेल हे स्पष्ट आहे.

टीप (9) : (D 21) मध्ये n ! ची व्याख्या करण्यासाठी (n -1)! चा उपयोग केला आहे. म्हणजे ज्या संकल्पनेची व्याख्या करावयाची त्याच संकल्पनेचा वापर व्याख्या करताना केला गेला आहे. त्यामुळे (D21) ही व्याख्या गोलाकार (circular) आहे असे वाटेल. पण तसे नाही. 0! ची किंमत (D21) या व्याख्येतच दिल्याने (D21) ही व्याख्या गोलाकार होत नाही. कसे ते पहा. 4! च्या किंमतीसाठी 3! ची किंमत वापरावयाची; 3! ची किंमत मिळण्यासाठी 2! ची किंमत वापरावयाची; 2! ची किंमत काढण्यासाठी 1! च्या किंमतीचा उपयोग करावयाचा, आणि 1! साठी 0! ची किंमत उपयोगात आणावयाची व ती तर व्याख्येतच दिली आहे. 0! चा अंतर्भाव व्याख्येत नसता तर आपण 4! ची किंमत (D21) वापरून काढू शकलो नसतो व त्या स्थितीत व्याख्या (D21) ही गोलाकार झाली असती. (D21) मध्येच 0! ची किंमत दिली नसती तर ती व्याख्या पूर्ण झाली नसती, कारण 4! काढण्यासाठी, किंबहुना कोणतीही n! ही किंमत काढण्यासाठी आपण 0! पाशी अडून बसलो असतो.

टीप (10) : (D21) सारख्या व्याख्यांना पुनरावर्ती (recursive) व्याख्या म्हणतात. त्यांचे वैशिष्ट्य म्हणजे ज्या संकल्पनेची व्याख्या करावयाची, तिचाच उपयोग व्याख्या करताना करावयाचा. पुनरावर्ती व्याख्यांना गणिताच्या व विशेषत: सैद्धांतिक संगणक शास्त्राच्या (Theoretical computer Science) अभ्यासात फार महत्त्वाचे स्थान आहे.

7. समसंख्या

समसंख्येची नेहमीची व सुपरिचित व्याख्या अशी आहे.

दोनच्या पूर्ण पटीतील सर्व पूर्णांकांना समपूर्णांक किंवा समसंख्या असे म्हणतात. ....(D22)

हीच व्याख्या थोड्याशा फरकाने वेगळ्या शब्दात पुढील विविध प्रकारे दिली जाते. (i) n पूर्णांक असताना 2n प्रकारच्या पूर्णांकांना समसंख्या म्हणतात. (ii)

ज्या पूर्णांकांना 2 ने नि:शेष भाग जातो त्यांना समसंख्या म्हणतात. (iii) ज्या पूर्णांकांच्या शेवटचा म्हणजे एकक स्थानाचा अंक 0, 2, 4, 6 किंवा 8 असतो त्यांना समसंख्या म्हणतात.

या व्याख्येनुसार 0, ± 2, ± 4, ± 6, ... या समसंख्या होत. 2, 4, 6 8, ...या धन समसंख्या, आणि -2, -4, -6, ...या ऋण समसंख्या असे त्यांचे वर्गीकरण केले जाते. शून्य हा पूर्णांक समसंख्या आहे, पण तिला धन अथवा ऋण यापैकी कोणतेच विशेषण लागत नाही. +0 व - 0 असा काही प्रकार नाही.

समसंख्येची पुढील आणखी वेगळी व्याख्या तपासा :

(i) 2 ही समसंख्या आहे; (ii) जर x ही समसंख्या असेल तर x ±2 या देखील समसंख्या असतात; (iii) या 2 नियमांनुसार ज्या संख्या तयार होतील त्यांना आणि केवळ त्यांनाच समसंख्या म्हणतात. ....(D23)

(D23) या व्याख्येत तीन भाग (किंवा नियम) आहेत. भाग (i) मध्ये 2 हे समसंख्येचे प्रत्यक्ष (concrete) उदाहरण दिले आहे. भाग (ii) मध्ये इतर समसंख्या कशा तयार होतात हे सांगितले आहे. भाग (iii) सांगतो की (i) व (ii) या भागांव्यतिरिक्त कोणत्याही पद्धतीने समसंख्या तयार करण्याचा दावा करता येणार नाही.

व्याख्या (D23) नुसार 8 ही समसंख्या आहे हे कसे सिद्ध करावयाचे ते आता पहा. व्याख्येच्या भाग (i) प्रमाणे 2 ही समसंख्या आहे. आता 2 ही समसंख्या असल्यामुळे भाग (ii) वापरुन (म्हणजेच माहीत असलेली x ही समसंख्या 2 आहे हे वापरून) 2 + 2 = 4 ही समसंख्या होते. आता 4 ही समसंख्या झाल्यामुळे पुन्हा व्याख्येचा भाग (ii) वापरल्याने 4 + 2 = 6 ही समसंख्या असल्याचे दाखविता येते. तोच भाग (ii) पुन्हा एकदा वापरून 6 + 2 = 8 ही समसंख्या असल्याचे सिद्ध होते. याचप्रमाणे भाग (ii) पुन्हा पुन्हा वापरून समसंख्यांचा संच निर्मिला जातो.

व्याख्या (D22) व (D23) या समतुल्य आहेत. कारण दोन्हीमुळे तोच म्हणजे {0, ± 2, ± 4, ...} हाच संच समसंख्या या नामाभिधानाला पात्र होतो.

टीप (11) : उपविभाग 6 मध्ये आपण n! ची पुनरावृत्ती व्याख्या पाहिली त्यावरून (D23) ही समसंख्येची पुनरावृत्ती व्याख्या आहे हे लक्षात येईल.

टीप (12) : कोणत्याही संज्ञेच्या अनंत पुनरावृत्ती व्याख्या देणे शक्य असते. आपल्या अभ्यासविषयाच्या संदर्भात त्यापैकी जी व्याख्या अधिक योग्य वाटेल ती निवडावयाची असते. समसंख्येच्या आणखी दोन पुनरावृत्ती व्याख्या बघा:

(i) 2 ही समसंख्या आहे; (ii) जर x व y या समसंख्या असतील तर $x \pm y$ या देखील समसंख्या असतात; (iii) या दोन नियमांनुसार ज्या संख्या तयार होतात त्यांना आणि केवळ त्यांनाच समसंख्या म्हणतात. ....(D24)

ii) 2 व 4 या समसंख्या आहेत; (ii) x ही समसंख्या असेल तर $x \pm 4$ या सुद्धा समसंख्या असतात; (iii) केवळ या दोन नियमानुसार तयार न केलेली संख्या समसंख्या नसेल . ...(D25)

यांपैकी प्रत्येकी व्याख्या $0, \pm 2, \pm 4, \pm 6,...$ हाच संच समसंख्यांचा संच म्हणून जाहीर करते याची खात्री वाचकांनी करून घ्यावी.

टीप (13) : वरील विवेचनावरून 8 किंवा त्याचप्रमाणे कोणतीही समसंख्या ही खरोखरच समसंख्या आहे. हे दाखविण्यास व्याख्या (D22) पेक्षा इतर व्याख्यांना जास्त वेळ व जागा (पायऱ्या) लागतात असे दिसते. (2 ची चौथी पूर्ण पट 8 आहे हे दाखवण्यास म्हणजे (D22) वापरण्यास कमी वेळ व जागा लागते असे उघडउघड दिसून येते) पण काही बाबतीत (D24) व्याख्या ही (D 22) पेक्षा जास्त फायद्याची होऊ शकते. कसे ते आता पाहूया. ''दोन समसंख्यांची बेरीज सम संख्याच असते'' हा समसंख्यांचा एक महत्त्वाचा गुणधर्म आहे. व्याख्या (D22) वापरून हे विधान सिद्ध करण्यासाठी सिद्धता अशी लिहावी लागेल :

2m व 2n या कोणत्याही समसंख्या घ्या. यात m व n हे पूर्णांक आहेत. आता $2m + 2n = 2 (m + n)$. दोन पूर्णांकांची बेरीज पूर्णांकच असते, म्हणून $m + n$ हा पूर्णांकच आहे. समजा $m + n = q$. म्हणून $2m + 2n = 2q$. आता q हा पूर्णांक असल्याने $2m + 2n$ ही 2q प्रकारची म्हणजेच समसंख्या आहे. 2m व 2n या कोणत्याही (arbitrary) समसंख्या असल्याने इष्ट विधान सिद्ध होते. हेच विधान व्याख्या (D24) वापरून ताबडतोब सिद्ध होते कारण त्या व्याख्येच्या भाग (ii) मुळे सिद्धता व्याख्येपासून आपोआप झटकन मिळते. यावरून या विधानाच्या संदर्भात व्याख्या (D24) ही व्याख्या (D22) पेक्षा सोपी असल्याचे म्हणता येईल.

8. सुडौल संख्या

परिशिष्टात सुडौल संख्येबाबत माहिती पहा.

9. समारोप :

एकाच संकल्पनेच्या निरनिराळ्या व्याख्या असू शकतात हे आपण सहा उदाहरणांनी बघितले. कोणती व्याख्या सोपी हे सुद्धा संदर्भानुसार बदलू शकते हेही आपण समसंख्येच्या व्याख्येच्या बाबतीत बघितले. पुनरावृत्ती प्रकारच्या व्याख्या एकाच संकल्पनेसाठी अनंत प्रकारे देता येतात हेही विशेष जाणवते. वाचकांनी गणिताच्या अभ्यासात एकाच संकल्पनेच्या मिळतील तेवढ्या व्याख्या एकत्र कराव्यात व त्या समतुल्य आहेत हेही सिद्ध करण्याचा प्रयत्न करावा.

***

नमुन्यांना फसू नका - 1

''नमुन्यांचा (आकृतीबंधांचा) अभ्यास म्हणजे गणित'' असे अनेकवेळा म्हटले जाते. व्यवहारातही काही नमुने बघितले की त्या नमुन्यांवरून, ते नमुने ज्या आकृत्यांचे किंवा वस्तुंचे किंवा समूहाचे किंवा व्यक्तींचे असतात त्यांच्याबद्दल काही अटकळी, काही अनुमाने, काही अंदाज आपण बांधितच असतो. दुकानात खरेदीसाठी गेलो असता पोत्यातील ओंजळभर तांदूळ हातात घेऊन त्या नुमन्यावरून, त्या पोत्यातील तांदूळ कसा आहे हे आपण ठरवतो. तसेच कापडाच्या ताग्यातील थोडेसे कापड हाताने बघून त्या कापडाच्या दर्जाबद्दल निर्णय आपण घेत असतो. एखाद्या प्रदेशातली बरीचशी माणसे बुटकी असलेली आढळली की तो प्रदेश बुटक्यांचा - खुज्या लोकांचा - आहे असे समजले जाते. व्यवहारात अनेक वेळा अशी अनुमाने खपून जातात. त्याबद्दल विशेष मतभेद सहसा व्यक्त केले जात नाहीत.

गणितात मात्र कितीतरी वेळा 'नमुन्यांवरून निष्कर्षाप्रत येणे' हे 'सुतावरून स्वर्ग गाठण्यासारखे' होते. मोठमोठ्या गणितज्ञांनी नमुन्यांवरून बांधलेली अनुमाने चुकीची निघाली आहेत. याचे काही दाखले दाखवता येतात.

प्रतिदर्श (sample)चा अभ्यास करून तो प्रतिदर्श ज्या समूहातून आला त्या समूहाबद्दल निष्कर्ष काढण्याचे 'अनुमानशास्त्र' (inference)' नामक एक शास्त्र सांख्यिकी या शास्त्रशाखेचा एक अविभाज्य भाग आहे. असे निष्कर्ष किती प्रमाणात चुकीचे होऊ शकतील याचेही मोजमाप या शास्त्रात दिले जाते. उदाहरणार्थ, निवडणुकींच्या काळात काही टक्के मतदारांचा कल अजमावून कोणत्या पक्षाला किती जागा मिळतील याचे अंदाज बांधले जातात व त्या अंदाजात किती प्रमाणात कमी-अधिक बदल होण्याची शक्यता आहे याचीही आकडेवारी दिली जाते.

गणितात काही संख्या दिल्या, अथवा काही प्रयोगातून वा उदाहरणातून त्या मिळाल्या असल्या तर त्या संख्यांच्या वागण्याचा - त्या तयार होण्याचा - काही नियम आहे का हे शोधून काढता येईल का ? त्या नियमात थोडीशीही चूक मात्र अजिबात खपून घेतली जाणार नाही. दिलेल्या संख्या कोणत्या आकृतीबंधातून आल्या हे अचूकपणे ठरविता येईल का ? म्हणजे त्या आकृतीबंधाचे सूत्र निश्चितपणे ओळखता येणे शक्य आहे का ?

आपल्याजवळील संख्यांच्या प्रतिदर्शावरून त्या संख्या कोणत्या क्रमातील (Sequence मधील) आहेत हे खात्रीपूर्वक सांगता येईल का ? गणितात सिद्धतेशिवाय कोणत्याही विधानाचे 'पान हालत नाही'. तेव्हा आपल्याजवळ असलेल्या काही संख्यांवरून त्या कोणत्या क्रमाचा (Sequence चा) भाग आहेत याची सिद्धता देता येईल का ? एखाद्या परिस्थितीत आपल्याला मिळालेल्या किंवा दिल्या गेलेल्या संख्या ज्या नियमाने तयार होतात असे आपल्याला वाटते किंवा भासते, तोच नियम त्या परिस्थितीतील पुढील संख्या तयार होण्यालाही लागू पडेल का ? म्हणजेच दिलेल्या संख्या तयार होण्याचा नियम आपण बरोबर ओळखला आहे का ? तसे असेल किंवा नसेल, तर त्याची सिद्धता काय ? मनात उद्भवलेल्या या व अशा प्रश्नांची उत्तरे शोधण्यासाठी आपण अनेक उदाहरणांचे दाखले घेऊ शकतो. त्यांवरून गणिताच्या अभ्यासात नमुन्यांवरून फसले जाण्याच्या कितीतरी विविध शक्यता आपल्यापुढे सतत येत असतात याची जाणीव होऊ शकेल व त्या अनुभवांवरून अखंड सावध व जागरूक राहण्याच्या आवश्यकतेवर प्रकाश पडेल.

नेहमी विचारल्या जाणाऱ्या प्रश्नासारखाच एक प्रश्न प्रथम विचारात घेऊया.

प्रश्न : खालील 'क्रमा'तील ("Sequence' मधील) दिलेल्या संख्यानंतरची पहिली संख्या कोणती ?

2, 4, 6, 8,... ....(1)

टीप (1) : दिलेल्या 'क्रमा'तील पहिल्या चार संख्या दिल्या असून 5 वी संख्या कोणती हे विचारले आहे. '...' या टिंबानी तो 'क्रम' जितका वाढवू तितका वाढवता येतो हे सांगितले आहे. हेच गणिती भाषेत ''हा 'क्रम' अनंतापर्यंत जातो'' असे म्हणतात.

टीप (2) : सकृतदर्शनी हा प्रश्न इतका सोपा वाटतो की 'हा प्रश्न विचारून तुम्ही आमचा अपमान तर करीत नाही ना ?' असे वाचकाला वाटू शकेल. वाचकाला असेही वाटण्याची शक्यता आहे की जगातील कोणतीही व्यक्ती – सुशिक्षित, अशिक्षित, साक्षर, निरक्षर (वेडे व कदाचित मंदबुद्धी सोडून) या प्रश्नाचे अगदी बरोबर उत्तर देऊ शकेल, मग त्या व्यक्तीचा गणिताचा काहीही अभ्यास नसला तरी. पण प्रत्यक्षात खरे काय याचा उलगडा पुढील विवेचनावरून होईल.

विवेचन :

"(1) मध्ये दिलेल्या चार संख्यांच्या पुढील, म्हणजे 5 वी संख्या 10 आहे'' असेच वरील प्रश्नाचे उत्तर बहुतेकजण देतील. उत्तर बरोबर की चूक यापेक्षा

'दिलेले उत्तर तसे का ?' याची कारणमीमांसा महत्त्वाची असते. त्यावरून उत्तर मिळवण्यासाठी कसा विचार केला जातो हे समजून येते व त्या विचारात काही त्रुटी असल्यास ती दाखवून देण्याची संधी मिळते.

वरील प्रश्नाचे उत्तर 10 का ? असे विचारले असता बहुधा पुढीलप्रमाणे उत्तरे मिळतात.

A) कोणी म्हणतात 2, 4, 6, 8 या संख्या ओळीने 2 च्या 1 पट, 2 पट,3 पट व 4 पट आहेत व म्हणून त्यांच्या पुढची संख्या 2 च्या 5 पट असली पाहिजे. आणि 2 ची 5 पट 10 आहे. म्हणून उत्तर 10.

B) कोणी म्हणतात 2, 4, 6, 8 या सुरवातीच्या ओळीने येणाऱ्या समसंख्या आहेत. त्यांच्या नंतरची समसंख्या आहे 10. म्हणून उत्तर 10.

C) कोणी म्हणतात, 4 व 2 मधील फरक 2 आहे, 6 व 4 यांच्यातील फरक 2 आहे, व 8 व 6 यांच्यामधील फरक 2 आहे. त्यामुळे 8 नंतरची संख्या 10 असेल तरच 10 व 8 मधील फरक 2 असेल. आणि अशा तऱ्हेने शेजारशेजारच्या प्रत्येक दोन संख्यांमधील फरक 2 राहण्यासाठी उत्तर हवे 10.

वरील तिन्ही उत्तरे, उत्तर 10 असण्याचे तेच कारण देतात; फक्त ते निरनिराळ्या शब्दात दिले गेले आहे. वरील कारण आणखी निराळ्या शब्दात, पण थोड्या अधिक गणिती भाषेत पुढीलप्रमाणे सांगितले जाते. दिलेल्या चारी संख्या 2n प्रकाराच्या आहेत. 2n मध्ये n ची किंमत अनुक्रमे 1, 2, 3, 4 ही घेतली असता 2, 4, 6, 8 या संख्या अनुक्रमे मिळतात. त्यामुळे n ची 5 ही पुढील किंमत घेतल्यास 2n ची किंमत 10 होते व म्हणून उत्तर 10. 2n ला "2, 4, 6, 8,..." या 'क्रमा'चे सर्वसाधारण पद (general term) म्हणतात. वेगळ्या भाषेत हेच "2n हे सूत्र 2, 4, 6, 8,... हा 'क्रम' प्रसवते (तयार करते)'' किंवा ''2n हे सूत्र 2, 4, 6, 8,... या 'क्रमा'ला जन्म देते'' किंवा "2n हे 2, 4, 6, 8,... चे जनकसूत्र आहे'' असे सांगितले जाते.

बहुतेकांच्या मनांत 10 हेच वरील प्रश्नाचे योग्य उत्तर आहे असे वाटत असल्याने त्यांना वरील कार्यकारणमीमांसा योग्य वाटते. पण आता $n^4 - 10n^3 + 35 n^2 - 48n + 24$ हे सूत्र घ्या. त्यात अनुक्रमे n = 1, 2, 3, 4 या किंमती घाला. त्यामुळे 2, 4, 6, 8 याच संख्या अनुक्रमे मिळतील. त्यामुळे $n^4 - 10n^3 + 35n^2 - 48n + 24$ हे सूत्रही (1) मध्ये दिलेल्या 'क्रमा'ला जन्म देते हे दिसून

येईल. या सूत्रात $n = 5$ घातल्यास 34 मिळतात. त्यामुळे "(1) या 'क्रमा'तील पुढली म्हणजे 5 वी संख्या 34 आहे'' असेही वरील प्रश्नाचे उत्तर होऊ शकेल. मग

प्रश्न 1 चे 10 हे उत्तर बरोबर का 34 हे उत्तर बरोबर ?

(1) मधील दिलेल्या 2, 4, 6, 8 या संख्यांचे 2n हे जनकसूत्र आहे असे म्हणणे जितके योग्य, तितकेच $n^4 - 10n^3 + 35n^2 - 48n + 24$ हेही त्याच संख्यांचे जनकसूत्र आहे हे म्हणणेही तितकेच योग्य आहे. तसे म्हणाल तर 2, 4, 6, 8 या चार संख्यांची हजारो, लाखो आणि खरे म्हणजे अनंत जनकसूत्रे तयार करता येतील. यातील प्रत्येक जनकसूत्राकडून $n = 1, 2, 3, 4$ साठी अनुक्रमे 2, 4, 6, 8 याच संख्या मिळतील, पण $n = 5$ साठी निरनिराळ्या संख्या मिळतील. मग वरील प्रश्नाचे योग्य उत्तर काय ? निरनिराळी (पण योग्य असणारी) जनकसूत्रे निरनिराळी उत्तरे देतील.

या सर्व विवेचनाचा अर्थ असा की नुसत्या 2, 4, 6, 8 या चार (किंवा अशाप्रकारे कितीही सान्त) संख्या देऊन "2, 4, 6, 8,... यातील 5 वी संख्या कोणती ?'' या प्रश्नाला एकमेव उत्तर नाही. म्हणजेच असा प्रश्न विचारणेच चूक आहे.

'दिलेल्या संख्यांच्या पुढली संख्या कोणती ?' या प्रश्नासारखे प्रश्न अनेक ठिकाणी विचारले जातात. गणिताच्या परीक्षातून तर ते असतातच. शिवाय अगदी लेखनिक निवडण्यासाठी घेतल्या जाणाऱ्या परीक्षांतूनही ते दिसून येतात. विशेष म्हणजे 'अर्जदारामध्ये अथवा विद्यार्थ्यामध्ये नमुन्यांवरून मूळ क्रम (squence) ओळखण्याचे कसब आहे का हे बघण्यासाठी असे प्रश्न आम्ही मुद्दाम विचारले' असेही सांगितले जाते. आपण वर जे विवेचन केले त्यावरून मात्र हे उघड झाले की गणिताच्या दृष्टीने अशा प्रश्नांना तसा काही अर्थ नाही, किंबहुना गणिताच्या दृष्टीने असे प्रश्न विचारणे काहीसे चुकीचेच आहे.

निरनिराळी जनकसूत्रे कशी मिळतात ?

2, 4, 6, 8 साठी 2n आणि $n^4 - 10n^3 + 35n^2 - 48n + 24$ ही दोन वेगवेगळी जनकसूत्रे कशीकाय ? 2n या राशीची कोटी 1 आहे, तर $n^4 - 10n^3 + 35n^2 - 48n + 24$ या राशीची कोटी (degree) 4 आहे. म्हणजे 2n मध्ये काहीतरी मिळविल्यावरच $n^4 - 10n^3 + 35n^2 - 48n + 24$ मिळणार. या दोन्ही जनकसूत्रांच्या $n = 1, 2, 3, 4$ साठीच्या किंमती समान असल्याने 2n मध्ये अशी राशी मिळविली पाहिजे की जिची किंमत $n = 1, 2, 3, 4$ साठी शून्य

असली पाहिजे. अशा राशीचे एक उदाहरण $(n - 1)(n - 2)(n - 3)(n - 4)$ हे आहे. आता

$n = 1, 2, 3, 4$ साठी $(n - 1)(n - 2)(n - 3)(n - 4) = 0$ असल्याने

$2n + (n - 1)(n - 2)(n - 3)(n - 4)$ याला सरळरूप द्या.

तुम्हांला $n^4 - 10n^3 + 35n^2 - 48n + 24$ ही राशी मिळेल.

$2(n - 1)(n - 2)(n - 3)(n - 4)$,तसेच $3(n - 1)(n - 2)(n - 3)(n - 4)$ या राशींच्या किंमती देखील $n = 1, 2, 3, 4$ साठी शून्यच आहेत. किंबहुना

q हा कोणताही पूर्णांक असताना $n = 1, 2, 3, 4$ साठी

$q(n - 1)(n - 2)(n - 3)(n - 4) = 0$ म्हणून

$2n + q(n - 1)(n - 2)(n - 3)(n - 4)$, q = कोणताही पूर्णांक

या साऱ्या (एकूण अनंत) राशी 2, 4, 6, 8 साठी जनकसूत्रे बनतील आणि म्हणून "2, 4, 6, 8,... या 'क्रमा'तील पुढील (म्हणजे पाचवी) संख्या कोणती ?'' या प्रश्नाची अनंत योग्य उत्तरे असू शकतील; एक आणि एकच उत्तर असणार नाही. या सर्वाचा अर्थ असा होतो की,

2, 4, 6, 8,..., 2n,... .... (2)

हा एक क्रम (Sequence) आहे. तसेच

2, 4, 6, 8,..., $(n^4 - 10n^3 + 35n^2 - 48n + 24)$,... .... (3)

हा आणखीन निराळा क्रम आहे. (2) व (3) हे निरनिराळे क्रम आहेत हे ध्यानांत घ्या. कारण (2) या क्रमामध्ये पाचवी संख्या 10 आणि (3) या क्रमामध्ये पाचवी संख्या 34 आहे. पाचव्या नंतरच्या संख्याही या दोन क्रमांमध्ये निरनिराळ्या असतील. (2) मध्ये सर्वसाधारण पद 2n आहे, तर (3) मध्ये सर्वसाधारण पद $n^4 - 10n^3 + 35n^2 - 48n + 24$ हे आहे.

हे अगदी पक्के लक्षात ठेवले पाहिजे की, सर्वसाधारण पद दिल्याशिवाय 'क्रमा'ची व्याख्या पूर्ण होऊ शकत नाही. ...(4) म्हणजेचब, केवळ काही सान्त संख्या देऊन क्रमाची व्याख्या करता येत नाही...

क्रमाची व्याख्या देताना त्या क्रमाचे सर्वसाधारणपद देणे आवश्यक असल्याने

2, 4, 6, 8, ...

हा क्रम नाही. कारण यात सर्वसाधारण पदाचा काहीच उल्लेख नाही. म्हणूनच सुरवातीपासून '2, 4, 6, 8...'चा जेथे जेथे उल्लेख आला आहे तेथे तेथे 'क्रम' हा शब्द अवतरण चिन्हात ('क्रम' असा) घातला आहे.

या एका मासलेवाईक उदाहरणावरून आपण हे शिकलो की सर्वसाधारण पद न देता नुसती टिंबे टिंबे (...) (जशी (1) मध्ये दिली आहेत) वापरून कितीही सान्त संख्या देऊन गणितातील क्रम या संकल्पनेचे उदाहरण देता येत नाही. अशा स्वरूपाचे आणखी एक उदाहरण बघूया.

1, 2, 4, 7, 11, 16,... ....(5)

हे क्रमाचे उदाहरण होऊ शकत नाही. कारण वरवर पाहता $a_1 = 1$ आणि $a_m = a_{m-1} + (m - 1)$, m = 2, 3, 4, ... हे (5) चे जनकसूत्र असल्याचे वाटते पण

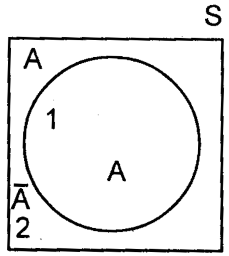
$a_1 = 1$ आणि $a_m = a_{m-1} + (m - 1) + (m - 2) (m - 3) (m - 4) (m - 5) (m - 6)$, m = 2, 3, 4,... हे सुद्धा (5) चे सर्वसाधारण पद (किंवा जनकसूत्र) होऊ शकते. याचप्रकारे (5) ची अनंत जनकसूत्रे देता येतील. म्हणजे (5) वापरून क्रमाची योग्य व्याख्या करता येत नाही. त्यासाठी म्हणजे क्रमाची योग्य व्याख्या देण्यासाठी योग्य ते इच्छित जनकसूत्र दिलेच पाहिजे.

☆ ☆ ☆

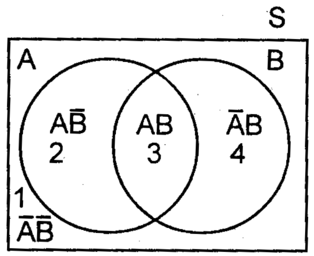
****

नमुन्यांना फसू नका - 2

एका आयताच्या आतील बाजूस एक वर्तुळ काढा. त्या वर्तुळामुळे आयत दोन भागात वाटला जातो. (आकृती 1 पहा) वर्तुळाच्या आतील हा एक भाग आणि वर्तुळाच्या बाहेरील पण आयताच्या आतील हा दुसरा भाग. आकृती 1 मध्ये हे दोन भाग 1 व 2 या क्रमाकांनी दाखविले आहेत.



आकृती 1



आकृती 2

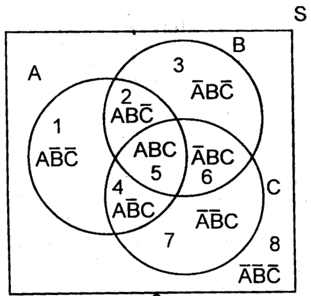
आता एका आयताच्या आतील बाजूस एकमेकांना छेदणारी दोन वर्तुळे काढा (आकृती 2 पहा) त्यामुळे आयताच्या आतील भाग एकूण 4 भागात विभागला जातो. हे चार भाग 1,2,3,4 या क्रमाकांनी दाखविले आहेत. (दोन्ही वर्तुळे समान त्रिज्येची असली पाहिजेत असे नाही.)

आता एका आयताच्या आतील भाग जास्तीत जास्त भागात विभागला जाईल अशा तऱ्हेने त्या आयताच्या आतील भागात एकमेकांना छेदणारी 3 वर्तुळे काढा. (ही तिन्ही वर्तुळे समान त्रिज्यांची असली पाहिजेत असे नाही) आकृती 3 पहा. अशा 3 वर्तुळांनी आयताचा अंतर्भाग जास्तीत जास्त 8 भागात विभागला जाऊ शकतो हे आपल्या लक्षात येईल. आकृती 3 मध्ये या 8 भागांना 1 ते 8 क्रमांक दिले आहेत.

अशा प्रकारच्या आकृत्या आपण संचाच्या अभ्यासात वेन (Venn)आकृत्या नावाने काढीत असतो. पुन्हा आकृती 1 पहा. त्यातील आयत हा विश्वसंच (Universal Set) आहे असे आपण धरून चालूया. तो S या अक्षराने दाखविला जातो. त्यातील वर्तुळ, A हा संच दाखवते असे समजा. त्यामुळे त्या आकृतीतील भाग 2 हा A चा पूरक संच (Complementary Set of A = $\bar{A}$) दाखवेल. आकृती 1 मधील भागांना त्याप्रमाणे नावे दिली आहेत.

आकृती 2 मधील आयत हा विश्वसंच S असून त्याच्या आतील दोन वर्तुळे A व B हे दोन संच दर्शवितात असे मानूया. या आकृतीतील भाग 3 हा AB हा संच दाखवेल. तो A व B या दोन संचाचा छेद संच (intresection) दाखवतो. त्याचप्रमाणे भाग 2,4 व 1 हे अनुक्रमे $A\overline{B}$, $\overline{A}B$ व $\overline{A}\overline{B}$ हे संच दाखवितात. आकृती 2 मध्ये 1 ते 4 या भागांना त्याप्रमाणे नावे दिली असल्याचे दिसेल.

आकृती 3 मधील तीन वर्तुळे ही A, B, C नावाचे संच दाखवतात असे समजा. त्यांना त्याप्रमाणे नावे दिली आहेत. येथेही विश्वसंच S नावाने आयत काढूनच दाखविला आहे. त्याचे तीन वर्तुळांमुळे 8 भाग झाले आहेत. हे 8 भाग कोणते संच दाखवितात ते कोष्टक 1 मध्ये दाखविले आहे. आकृतीमध्येही त्या त्या भागांची त्यानुसार नावे लिहिली आहेत. ही नावे बरोबर असल्याची खात्री करून घ्या. उदा. भाग 1 हा B व C हा या दोन्ही संचाच्या (म्हणजेच B व C यांनी दाखविलेल्या वर्तुळांच्या) बाहेर, पण A संचाच्या आत येत आहे. म्हणून भाग 1 हा A, $\overline{B}$, $\overline{C}$ या तीन संचांचा छेद (intersection) आहे म्हणजेच तो $A \cap \overline{B} \cap \overline{C} = A\overline{B}\overline{C}$ आहे.



आकृती 3

आता S विश्वसंचात A,B,C,D हे चार संच आहेत असे समजा. विश्वसंचातील x हा एखादा सदस्य A मध्ये असेल किंवा नसेल; तसेच तो B या संचात असेल किंवा नसेल; C मध्ये असेल किंवा नसेल आणि D मध्ये असेल किंवा नसेल त्यानुसार विश्वसंच कोष्टक 2 मध्ये दाखविलेल्या 16 उपसंचात विभागला जात असल्याचे वेन आकृतीत दाखवावे लागेल.

त्यासाठी A,B,C,D हे चार संच एकमेकांस छेदणाऱ्या चार वर्तुळांनी दाखविण्याचे ठरविल्यास, त्यांच्या एकमेकांस छेदण्यामुळे, आयताने दाखविलेला S हा विश्वसंच कोष्टक 2 मध्ये दिलेल्या 16 भागात विभागला जाणे आवश्यक आहे.

वेन आकृतीत प्रत्येक संच वर्तुळाने दाखविल्यास, एक संच असताना विश्वसंचाचे 2 = (2^1) विभाग होतात. दोन संच असताना जास्तीत जास्त 4 = (2^2) विभाग होतात. व तीन संच असताना जास्तीत जास्त 8 = (2^3) विभाग होतात हे आपण अनुक्रमे आकृती 1,2,3 मध्ये पाहिले आहे.

कोष्टक 1

आकृती 3 मधील भाग क्रमांक	त्या भागाने दाखविलेल्या संचाचे नाव
1	$A\overline{B}\overline{C}$
2	$AB\overline{C}$
3	$\overline{A}B\overline{C}$
4	$A\overline{B}C$
5	ABC
6	$\overline{A}BC$
7	$\overline{A}\overline{B}C$
8	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$

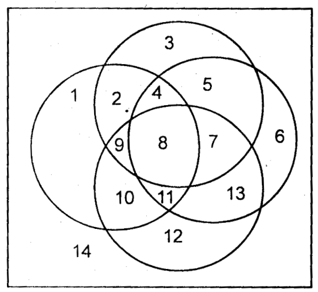
कोष्टक 2

ABCD	$\overline{A}BCD$	$AB\overline{C}\overline{D}$	$A\overline{B}\overline{C}\overline{D}$	A B C D
	$A\overline{B}CD$	$A\overline{B}C\overline{D}$	$\overline{A}B\overline{C}\overline{D}$	
	$AB\overline{C}D$	$A\overline{B}\overline{C}D$	$\overline{A}\overline{B}C\overline{D}$	
	$ABC\overline{D}$	$\overline{A}BC\overline{D}$	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}D$	
		$\overline{A}B\overline{C}D$		
		$\overline{A}\overline{B}CD$		

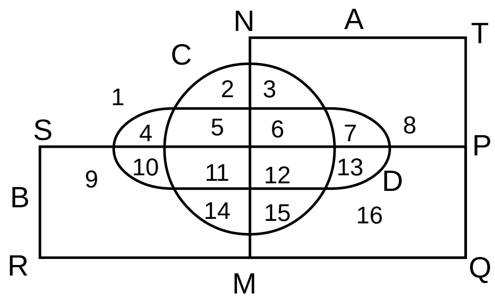
त्या नमुन्यांवरून एखाद्या आयतात एकमेकांना छेदणारी 4 वर्तुळे काढल्यास तो आयत जास्तीत जास्त $2^4 = 16$ भागात विभागला जातो असा अंदाज आपण बांधू शकतो.

पण असा निष्कर्ष काढणे म्हणजे नमुन्यावरून फसले जाणे आहे. कारण

आयताच्या अंगर्भागात एकमेकांना छेदणारी चार वर्तुळे कशीही काढली तरी ती त्या आयताला जास्तीत जास्त 14 भागातच विभागू शकतात. कोणत्याही परिस्थितीत चार वर्तुळांमुळे आयत 14 पेक्षा जास्त भागात वाटला जाणे शक्य नाही. (आकृती 4 पहा)



आकृती 4



आकृती 5

ज्या प्रमाणे त्रिकोण कसाही काढला तरी त्याच्या तीन कोनांची बेरीज 180^0 असते; त्यापेक्षा कमी वा जास्त असू शकत नाही. त्याचप्रमाणे एखाद्या प्रतलात एकमेकांस छेदणारी 4 वर्तुळे काढल्यास ती त्या प्रतलास 14 पेक्षा अधिक भागात वाटू शकत नाहीत. वाचकांनी निरनिराळ्या प्रकारे 4 वर्तुळे काढून या सत्याचा प्रत्यय अवश्य घ्यावा.

या विवेचनाचा धडा किंवा तात्पर्य असे की चार वा त्याहून अधिक संचाशी संबंध आल्यास ते सर्व संच वेन आकृतीत वर्तुळांनी दाखवणे योग्य व उपयुक्त ठरत नाही. किंबहुना तसे करणे चुकीचे ठरेल. मग साहजिकच असा प्रश्न उभा ठाकतो की ''चार संच असल्यास ते वेन आकृतीत कसे दाखवावे ?''

कोष्टक 3

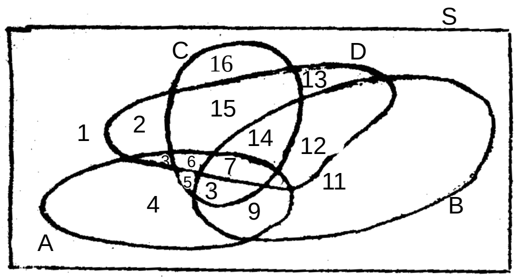
आकृती 5 मधील भाग क्रमांक	संबंधित उपसंच
1	$\bar{A}\ \bar{B}\ \bar{C}\ \bar{D}$
2	$\bar{A}\ \bar{B}\ C\ \bar{D}$
3	$A\ \bar{B}\ C\ \bar{D}$
4	$\bar{A}\ \bar{B}\ \bar{C}\ D$
5	$\bar{A}\ \bar{B}\ C\ D$
6	$A\ \bar{B}\ C\ D$
7	$A\ \bar{B}\ \bar{C}\ D$
8	$A\ \bar{B}\ \bar{C}\ \bar{D}$
9	$\bar{A}\ B\ \bar{C}\ \bar{D}$
10	$\bar{A}\ B\ \bar{C}\ D$
11	$\bar{A}\ B\ C\ D$
12	$A\ B\ C\ D$
13	$A\ B\ \bar{C}\ D$
14	$\bar{A}\ B\ C\ \bar{D}$
15	$A\ B\ C\ \bar{D}$
16	$A\ B\ \bar{C}\ \bar{D}$

संच दाखविण्यासाठी वर्तुळ वापरण्यास हरकत नाही. पण चार वा चारपेक्षा जास्त संच असल्यास सर्व संच वर्तुळांनी दाखविणे अयोग्य आहे. संच दाखविण्यासाठी वर्तुळाबरोबर चौरस, आयत, लंबवर्तुळ व इतर कोणत्याही प्रकारच्या आकृत्या वापरता येतात. उदाहरणार्थ आकृती 5 पहा. त्यात A हा संच TQMN या चौरसाने, B हा संच RSPQ या आयताने, C हा संच वर्तुळाने

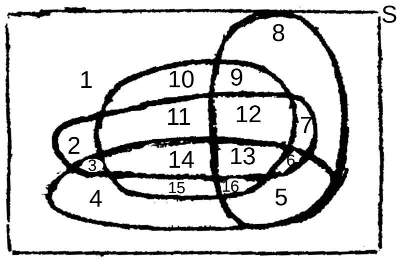
आणि D हा संच लंबवर्तुळाने दाखविले आहेत. या आकृतीसाठी विश्वसंच म्हणून या चारी संचांना सामावून घेणारा आयत काढता येईल. पण येथे हे चारी संच ज्या कागदावर काढले आहेत त्या कागदाने तयार झालेले प्रतलच विश्वसंच (S) असल्याचे मानले आहे. हे चारी संच एकमेकांना छेदल्यामुळे निर्माण झालेले 16 भाग आकृती 5 मध्येच 1 ते 16 या आकड्यांनी दाखवले आहेत. यातील प्रत्येक भाग (कोष्टक 2) मध्ये दिलेल्यांपैकी कोणता उपसंच दाखवितो ते कोष्टक 3 मध्ये दिले आहे.

वेन आकृती काढताना चार संच निरनिराळ्या आकृतींनी दाखविल्यावर त्या चार संचाच्या एकमेकास छेदण्यामुळे विश्वसंचाचे 16 भाग झालेले आढळले तरी ती आकृती योग्य असेलच असे नाही. चार संच व त्यातून निर्माण होणारे कोष्टक 2 मध्ये दिलेले सर्व 16 उपसंच त्या आकृतीत दाखवले गेले आहेत की नाही हे नीट तपासले पाहिजे. उदाहरणार्थ आकृती 6 पहा. त्यात S हा विश्वसंच व A,B,C,D हे चार संच दाखविले आहेत. विश्वसंच त्यामुळे 16 भागात विभागलाही गेला आहे. पण त्यातील भाग क्रमांक 2 व 13 हे दोन्ही $\bar{A}\ \bar{B}\ \bar{C}\ D$ हाच उपसंच दाखवितात आणि $\bar{A}\ B\ C\ \bar{D}$ हा उपसंच त्यात दाखविलाच जात नाही. त्यामुळे आकृती 6 योग्य नाही. आकृती 7 ही योग्य की अयोग्य हे वाचकांनी तपासून चार व त्याहून अधिक संचाची दिलेली वेन आकृती योग्य वा अयोग्य हे ठरविण्याचा सराव करावा.

चार वा त्याहून अधिक संचासाठी वेन आकृती काढताना काळजी घ्यावी लागते. काही वेळा संचासाठी वापरलेल्या आकृतींमुळे (वर्तुळ, लंबवर्तुळ, चौरस, आयत इत्यादींमुळे) विश्वसंच जरूरीपेक्षा अधिक भागात विभागला जाऊ शकतो. चार संचासाठी काढलेल्या आकृती 8 व 9 मधील वेन आकृत्या पहा.

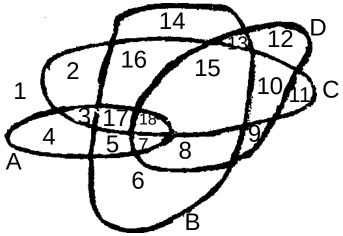


आकृती 6

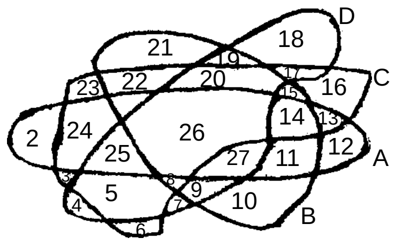


आकृती 7

त्या प्रत्येकीत 16 हून अधिक विभाग आहेत. चार संच असताना कोष्टक 2 मध्ये दिलेलेच 16 उपसंच असतात. याचा अर्थ, अशा आकृत्यांमधून दोन वा अधिक भाग तोच उपसंच दाखविण्याची शक्यता असते; त्याचबरोबर अपेक्षित उपसंचापैकी एखादा उपसंच दाखविलाच गेला नाही या बद्दल जागरूक रहावे लागते (जसे आकृती 6 मध्ये झाले आहे). अशा आकृत्या टाळणे हिताचे असते.

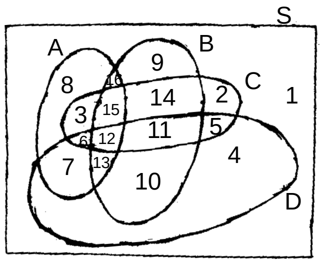


आकृती 8



आकृती 9

चार संच असताना, प्रत्येक संचासाठी एक वर्तुळ अशाप्रकारे चार वर्तुळे वापरून योग्य अशी वेन आकृती तयार करता येणे अशक्य आहे हे आपण पाहिले. पण प्रत्येक संचासाठी दीर्घवर्तुळ वापरल्यास 4 संच असताना देखील योग्य अशी वेन आकृती तयार करता येते. वेन यांनीच तशी आकृती तयार केली होती. शेजारील आकृतीत A, B, C,D या चार संचासाठी प्रत्येकी दीर्घवर्तुळ वापरून वेन आकृती काढून दाखविली आहे. त्यामुळे तयार झालेल्या 16 भागांना 1 ते 16 हे क्रमांक असे दिले आहेत की ते क्रमांक कोष्टक 2 मध्ये सांगितलेले उपसंच दाखवितात. तुलना करून खात्री करून घेणे सोपे पडावे म्हणून तसे केले आहे



आकृती 10

*****

म.सा.वि. आणि ल.सा.वि. यांचे गुणधर्म

1. विषय प्रवेश

दिलेल्या दोन पूर्णांकांचा महत्तम साधारण (किंवा सामायीक) विभाजक (मसावि) आणि लघुतम साधारण (किंवा सामायीक) विभाज्य (लसावि) कसे काढायचे हे आपण शाळेतच शिकतो. मसावि काढण्याच्या सर्वसाधारणत: दोन पद्धती आपण अभ्यासतो. एक पद्धत म्हणजे प्रत्येक पूर्णांकाचे मूळ-अवयव (म्हणजेच मूळ-विभाजक) काढून त्या दोन संख्यांच्या मूळ-अवयवांची तुलना करून दोघांना सामाईक असलेले विभाजक घेऊन त्यांचा गुणाकार करावयाचा. दुसरी पद्धत आहे भागाकार व उरलेली बाकी यांवर आधारित युक्लीड यांची पद्धत. दोन्ही पूर्णांकाचे मूळ-अवयव मिळाले की ते अवयव वापरून त्या पूर्णांकाच्या मसावि बरोबर त्यांचा लसावि देखील काढता येतो. किंवा एकदा मसावि मिळाला की 'मसावि x लसावि = त्या दोन पूर्णांकांचा गुणाकार' हे सूत्र वापरून लसावि मिळविता येतो. या पद्धती वापरून दोनपेक्षा अधिक पूर्णांकांचे मसावि आणि लसावि कसे काढावयाचे हेही आपण शिकतो. पण मसावि व लसावि यांचे कितीतरी सोपे आणि सुंदर गुणधर्म, संख्यांच्या व संचांच्या गुणधर्मांशी मिळतेजुळते आहेत याचा अभ्यास व्यवस्थितपणे सहसा केला जात नाही. म्हणून या लेखात ते गुणधर्म आपण अभ्यासणार आहोत. मसावि व लसावि यांचे इतक्या मोठ्या प्रमाणावर असणारे गुणधर्म पाहून आश्चर्य व अचंबा वाटल्याशिवाय राहणार नाही.

2. संकेतन (notation)

12 व 18 या दोन पूर्णांकांचा मसावि आहे 6, व लसावि आहे 36. हे आपण सर्वसाधारणत: मसावि (12, 18) = 6 व लसावि (12, 18) = 36 असे लिहितो. a व b या दोन संख्यांची बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार, व भागाकार आपण जवळजवळ नेहमीच अनुक्रमे a + b, a - b, a x b (किंवा a . b किंवा ab), व a ÷ b (किंवा a / b) असे लिहितो. बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार, भागाकार या, संख्यांवर करण्यात येणाऱ्या क्रिया (operations) आहेत. यातील प्रत्येक क्रिया दोन संख्यांवर करता येते. म्हणून त्यांना द्विपद क्रिया म्हणतात.

a व b यांची बेरीज a + b अशी लिहिण्याऐवजी बेरीज (a, b) किंवा + (a, b) अशीही लिहिता येईल. काही संकेतने वापरायला बोजड व किचकट तर काही सोपी व सुटसुटीत वाटतात. उदाहरणार्थ + (a, b) हे संकेतन a + b या

संकेतनाच्या मानाने बोजड वा किचकट वाटण्याचा संभव आहे. असे वाटणे हे कदाचित a + b या मांडणीचा सराव व ओळख शिक्षणाच्या सुरूवातीपासून व नेहमी झाल्यामुळे असू शकेल. एखाद्या क्रियेसाठी नेहमीपेक्षा वेगळे संकेतन [उदाहरणार्थ a + b च्या ऐवजी + (a, b)] कांही विशिष्ट संदर्भात अधिक योग्य व सोयीचे वाटणेही शक्य असते. हे सर्व विचार वजाबाकी, गुणाकार, भागाकार व इतर गणिती क्रियांच्या बाबतीतही तंतोतंत लागू होतात.

टीप (1) : मराठीत बेरीज हा शब्द दोन अर्थाने वापरला जातो. एक अर्थ आहे 'बेरीज' ही क्रिया, आणि दुसरा अर्थ आहे 'बेरीज या क्रियेचा परिणाम (result)'. जसे '3 व 6 यांची बेरीज करा' या वाक्यात बेरीज हा शब्द 'बेरीज ही क्रिया' या अर्थाने वापरला आहे. आणि '3 व 11 यांची बेरीज आहे 14' या वाक्यात बेरीज हा शब्द 'बेरीज क्रिया करून मिळालेला परिणाम' या अर्थाने वापरला आहे. इंग्रजीत मात्र या दोन अर्थी निरनिराळ्या शब्दांचा वापर अस्तित्वात आहे. 'बेरजेची क्रिया' या अर्थाने addition हा शब्द वापरतात. तर बेरीज क्रिया करून मिळणारा परिणाम sum या शब्दाने दाखविला जातो. Addition is an operation; its result gives sum असे म्हटले जाते. असाच प्रकार गुणाकार व भागाकार या क्रियांच्या बाबतीतही अस्तित्वात आहे. उदाहरणार्थ, multiplication is an operation which results in the product.

मसावि व लसावि या देखील पूर्णांकांवर करण्याच्या क्रिया आहेत. (पदावलींचेही मसावि व लसावि काढतात हे माहीत असू द्या). दोन पूर्णांकांचा मसावि व लसावि काढतात, त्यामुळे मसावि व लसावि या सुद्धा द्विपद क्रिया आहेत. a + b, a - b, a x b, a ÷ b या द्विपद क्रिया लिहिण्याच्या पद्धतीचा अवलंब करून

मसावि (a, b) च्या ऐवजी 'a मसावि b'

असेही लिहिता येईल. मसाविसाठी ⓜ हे संकेतन वापरून मसावि (a, b), किंवा a मसावि b हे, a ⓜ b असेही लिहिता येईल. ही तिन्ही संकेतने 'a व b यांचा मसावि' ही क्रिया दाखवितात असे आपण धरून चालूया. या तिन्हींपैकी कोणतेही संकेतन जरूरीप्रमाणे आपण वापरू. तसेच

लसावि (a, b), किंवा a लसावि b, किंवा a ⓛ b

ही तिन्ही संकेतने 'a व b यांचा लसावि' ही क्रिया दाखवतील.

3. लसावि या क्रियेचे विविध गुणधर्म

i) संवृतता : 12 व 18 या दोन पूर्णांकांचा 36 हा लसावि देखील पूर्णांकच आहे. त्याचप्रमाणे

कोणत्याही दोन धन पूर्णांकाचा लसावि हा देखील धनपूर्णांकच असतो....(1)

या गुणधर्माला 'लसावि या क्रियेची धन पूर्णांकांच्या संदर्भातीत संवृतता (closedness) म्हणतात.

ii) क्रमनिरपेक्षता : 12 व 18 या दोन पूर्णांकांचा जो लसावि तोच 18 व 12 यांचाही लसावि असतो. म्हणजे ज्या दोन पूर्णांकांचा लसावि काढावयाचा त्यांची अदलाबदल केली, म्हणजेच त्यांचा क्रम बदलला तरी त्यांचा लसावि बदलत नाही. संकेतन वापरून हा गुणधर्म असा लिहीता येईल.

a व b हे कोणतेही दोन धनपूर्णांक असतील तर, a लसावि b = b लसावि a..(2)

या गुणधर्माला 'धन पूर्णांकांच्या संदर्भातील लसावि या क्रियेची क्रमनिरपेक्षता' म्हणतात.

iii) साहचर्य : समजा आपल्याला 12, 18, व 72 या तीन पूर्णांकांचा लसावि काढावयाचा आहे. त्यासाठी प्रथम आपण 12 व 18 यांचा 36 हा लसावि काढला व मग हा 36 व 72 यांचा 72 हा लसावि काढला तरी चालेल किंवा प्रथम 18 व 72 यांचा 72 हा लसावि काढून नंतर 12 व हा 72 यांचा 72 हा लसावि काढला तरी चालू शकेल. दोन्ही प्रकारे उत्तर तेच येते. 12, 18 व 72 यांच्या ऐवजी कोणतेही तीन धनपूर्णांक घेतले तरी हा गुणधर्म लागू पडतो. संकेतन वापरून हे असे लिहीतात.

a, b, c हे कोणतेही तीन धनपूर्णांक असतील तर { [a लसावि b] लसावि c } = { a लसावि [b लसावि c] } किंवा { [a ⓛ b] ⓛ c } = { a ⓛ [b ⓛ c] } ....(3)

या गुणधर्माला 'धन पूर्णांकांच्या संदर्भातील लसावि या क्रियेचे साहचर्य' असे म्हणतात.

iv) अविकारक घटकाचे अस्तित्त्व : 12 व 1 या दोन पूर्णांकांचा लसावि 12 आहे. तसेच 34 व 1 यांचा लसावि 34 च आहे. (क्रमनिरपेक्षता या वर सांगितलेल्या गुणधर्मानुसार 1 व 34 यांचा लसावि 34 च असेल.) कोणत्याही

धनपूर्णांकाचे बाबतीत असेच होते हे स्पष्ट आहे. म्हणजे कोणत्याही धन पूर्णांकाचा 1 बरोबर लसावि घेतल्यास उत्तर तो पूर्णांक हेच राहते. संकेतन वापरून

a हा कोणताही धन पूर्णांक असल्यास लसावि (a, 1) = a ....(4)

म्हणजे 1 हा पूर्णांक असा आहे की त्याचा कोणत्याही धन पूर्णांकाबरोबर लसावि घेतल्यास त्या पूर्णांकात बदल होत नाही. म्हणून 1 ला 'धन पूर्णांकांच्या संदर्भातील लसावि या क्रियेचा अविकारक घटक' असे म्हणतात.

v) **क्रिया निष्फलता (Idempotent property) :** 12 व 12 यांचा लसावि होईल 12. सर्व धन पूर्णांकांचे बाबतीत हा गुणधर्म दिसून येईल. म्हणजे दोन्ही धन पूर्णांक समान (म्हणजेच तेच) घेतले तर त्या दोघांचा लसावि तोच पूर्णांक असतो. संकेतन वापरून

a हा कोणताही धनपूर्णांक असल्यास लसावि (a, a) = a ....(5)

या गुणधर्माला 'धन पूर्णांकांमधील लसाविची क्रियानिष्फलता' म्हणतात.

4. मसावि या क्रियेचे विविध गुणधर्म

i) **संवृतता :** 12 व 18 या दोन पूर्णांकाचा 6 हा मसावि देखील पूर्णांकच आहे. त्याचप्रमाणे

कोणत्याही दोन धनपूर्णांकांचा मसावि हा देखील धनपूर्णांकच असतो .. (6)

या गुणधर्माला 'धनपूर्णांकांमधील मसावि या क्रियेची संवृतता' असे म्हणतात.

ii) **क्रमनिरपेक्षता :** ज्या दोन पूर्णांकांचा मसावि काढावयाचा त्यांचा क्रम बदलला तरी त्यांचा मसावि तोच राहतो. संकेतन वापरून

a व b हे कोणतेही दोन धनपूर्णांक असतील तर, a मसावि b = b मसावि a

.....(7)

या गुणधर्माला 'धनपूर्णांकामधील मसावि या क्रियेची क्रमनिरपेक्षता' असे म्हणतात.

iii) **साहचर्य :** आपल्याला 12, 18, 30 या तीन पूर्णांकाचा मसावि काढावयाचा असल्यास त्यातील कोणत्याही दोघांचा मसावि काढून तो मसावि व उरलेला तिसरा पूर्णांक यांचा मसावि काढल्यास उत्तर बदलत नाही; तेच राहते.

कोणत्याही तीन धन पूर्णांकाच्या बाबतीत हे सत्य आहे. संकेतन वापरून हे सत्य असे लिहिता येते :

a, b, c हे कोणतेही तीन धनपूर्णांक असतील तर

{ a ⓜ [b m c] } = { [a ⓜ b] ⓜ c }

म्हणजेच { [a मसावि b] मसावि c } = { a मसावि [b मसावि c] }

किंवा

मसावि [a, मसावि (b, c)] = मसावि [मसावि (a, b), c } ....(8)

या गुणधर्माला 'धनपूर्णांकामधील मसावि या क्रियेचे साहचर्य' असे म्हणतात.

iv) **क्रियानिष्फलता (Idempotent property) :** 12 व 12 यांचा मसावि होईल 12. सर्व धनपूर्णांकाचे बाबतीत हा गुणधर्म खरा उतरेल. संकेतन वापरून

a हा कोणताही धनपूर्णांक असल्यास, मसावि (a, a) = a ....(9)

या गुणधर्माला 'धनपूर्णांकांमधील मसाविची क्रियानिष्फलता' म्हणतात.

5. लसावि आणि मसावि यांचे एकत्रित गुणधर्म

वरती उपविभाग 3 व 4 मध्ये आपण अनुक्रमे फक्त लसावि या क्रियेचे पाच आणि फक्त मसावि या क्रियेचे चार गुणधर्म पाहीले. आता आपण मसावि व लसावि या दोन्ही क्रिया केल्या असता दिसून येणारे एकत्रित गुणधर्म अभ्यासूया.

पूर्वतयारी : संख्यांवरील क्रियांच्या संदर्भात आपल्याला पुढील गुणधर्म माहीत आहेत.

a, b, c या कोणत्याही तीन संख्या असल्यास

(A) : a x (b + c) = (a x b) + (a x c).

[**एक उदाहरण :** 3 x (4 + 7) = (3 x 4) + (3 x 7)]

(B) : (a + b) x c = (a x c) + (b x c).

[**एक उदाहरण :** (6 + 8) x 4 = (6 x 4) + (8 x 4)]

(A) व (B) या गुणधर्मांना अनुक्रमे 'संख्यांच्या संदर्भात गुणाकाराचे उजवीकडील बेरजेवरील वितरण (in numbers, multiplication is distributive with respect to addition on the right)' आणि 'संख्यांच्या संदर्भात गुणाकाराचे डावीकडील बेरजेवरील वितरण (in numbers, multiplication is distributive with respect to addition on the left)' असे म्हणतात.

टीप (2) : कोणत्याही दोन क्रिया घेतल्यास (A) व (B) सारखी दोन्ही वितरणे सत्य असतील असे नाही. उदाहरणार्थ संख्यांवरील + आणि ÷ या दोन द्विपद क्रिया विचारात घ्या व पुढील उदाहरणे तपासा

$(18 + 9) \div 3 = 27 \div 3 = 9; (18 \div 3) + (9 \div 3) = 6 + 3 = 9$

म्हणजे $(18 + 9) \div 3 = (18 \div 3) + (9 \div 3)$

त्याचप्रमाणे $c = 0$ सोडून a, b, c या कोणत्याही तीन परिमेय (किंवा वास्तव) संख्या असल्यास

(D) $(a + b) \div c = (a \div c) + (b \div c)$

पण (E) $a \div (b + c) \neq (a \div b) + (a \div c)$.

[a = 30, b = 6. c = 4 घेऊन खात्री करून घ्या]. म्हणजे 'संख्यांच्या बाबतीत भागाकाराच्या क्रियेचे डावीकडील बेरजेवरील वितरण' सत्य आहे पण 'संख्यांच्या बाबतीत भागाकाराच्या क्रियेचे उजवीकडील बेरजेवरील वितरण' सत्य नाही (in numbers division is distributive with respect to addition on the left, but not on the right)

काही क्रियांच्या बाबतीत अशाप्रकारे एकीकडील वितरण खरे पण दुसरीकडील असत्य असते. त्यामुळे (A) व (B) यात दाखविलेला फरक करावा लागतो.

संख्यांच्या बाबतीत (A) व (B) दोन्ही गुणधर्म सत्य असल्याने

'संख्यांच्या बाबतीत गुणाकाराचे बेरजेवरील वितरण सत्य आहे' .....(10)

असे म्हटले जाते. पण

संख्यांच्या बाबतीत बेरजेचे गुणाकारावरील वितरण सत्य नाही ......(11)

कारण $15 + (3 \times 2) \neq (15 + 3) \times (15 + 2)$ आणि

$(7 \times 5) + 11 \neq (7 + 11) \times (5 + 11)$

म्हणजे संख्यांच्या बाबतीत गुणाकार व बेरीज यांचे एकमेकांवरील वितरण सममित (symmetrict) नाही [कारण (10) व (11) पहा]

i) एका दृष्टीने आश्चर्याची व दुसऱ्या दृष्टीने आनंदाची गोष्ट अशी आहे की लसावि व मसावि या द्विपद क्रियांच्या बाबतीत एकमेकांवरील वितरण सत्य व म्हणून सममित आहे. प्रथम काही उदाहरणांनी याचा पडताळा घेऊया.

$12 \textcircled{m} (18 \textcircled{\ell} 27) = 12 \textcircled{m} 54 = 6$ आणि
$(12 \textcircled{m} 18) \textcircled{\ell} (12 \textcircled{m} 27) = (6 \textcircled{\ell} 3) = 6$ ....(12)

$(14 \textcircled{\ell} 18) \textcircled{m} 10 = 126 \textcircled{m} 10 = 2$ आणि
$(14 \textcircled{m} 10) \textcircled{\ell} (18 \textcircled{m} 10) = 2 \textcircled{\ell} 2 = 2$ ....(13)

$20 \textcircled{\ell} (15 \textcircled{m} 10) = 20 \textcircled{\ell} 5 = 20$ आणि
$(20 \textcircled{\ell} 15) \textcircled{m} (20 \textcircled{\ell} 10) = 60 \textcircled{m} 20 = 20$ ....(14)

$(16 \textcircled{m} 42) \textcircled{\ell} 35 = 2 \textcircled{\ell} 35 = 70$ आणि
$(16 \textcircled{\ell} 35) \textcircled{m} (42 \textcircled{\ell} 35) = 560 \textcircled{m} 210 = 70$ ....(15)

अशाच प्रकारची आणखी काही उदाहरणे तयार करून वाचकांनी ती सोडवावी.

(12) व त्याच प्रकारची आणखी काही उदाहरणे सोडविल्यास असे वाटू लागेल की

धनपूर्णांकांच्या संदर्भात मसावि या क्रियेचे उजवीकडील लसावि या क्रियेवरील वितरण खरे आहे.

..(16)

(In positive intigers, HCF is distributive with respect LCM on the right)

(13) व त्याच प्रकारची आणखी काही उदाहरणे हाताळल्यास असे वाटायला लागेल की

धनपूर्णांकांच्या संदर्भात मसावि या क्रियेचे डावीकडील लसावि या क्रियेवरील वितरण खरे आहे.

...(17)

(14) व त्याच प्रकारच्या आणखी काही उदाहरणे घेतल्यास असे वाटणे शक्य आहे की

धनपूर्णांकांच्या संदर्भात लसावि या क्रियेचे उजवीकडील मसावि या क्रियेवरील वितरण सत्य आहे

.....(18)

(15) व तशाच प्रकारच्या आणखी उदाहरणांवरून असे वाटायला लागणे शक्य आहे की

धनपूर्णांकांच्या बाबतीत लसावि या क्रियेचे डावीकडील मसावि या क्रियेवरील वितरण खरे आहे.

....(19)

(16), (17), (18) व (19) हे निष्कर्ष आपण काही उदाहरणावरून काढले आहेत. पण तर्काधिष्ठित गणिती पद्धतीने ते सिद्ध करता येतात. त्या सिद्धता प्रत्यक्षात न बघता हे निष्कर्ष बरोबर आहेत असे आपण धरून चालूया.

(16) आणि (17) यांवरून आपल्याला पुढील गुणधर्म मिळतो :

धनपूर्णांकांच्या संदर्भात मसावि या क्रियेचे लसावि या क्रियेवर वितरण होते. (In natural numbers HCF is distributive with respect to LCM)

....(20)

(18) व (19) वरून पुढील गुणधर्म मिळतो :

धनपूर्णांकांच्या बाबतीत लसावि ही क्रिया मसावि या क्रियेवर वितरीत होते

.....(21)

संकेतन वापरून (20) व (21) पुढीलप्रमाणे लिहीतात :

a, b, c हे कोणतेही धन पूर्णांक असल्यास

a ⓜ (b ⓛ c) = (a ⓜ b) ⓛ (a ⓜ c), आणि

(a ⓛ b) ⓜ c = (a ⓜ c) ⓛ (b m c)

a ⓛ (b ⓜ c) = (a ⓛ b) ⓜ (a ⓛ c), आणि

(a ⓜ b) ⓛ c = (a ⓛ c) ⓜ (b ⓛ c) ....(22)

ⓛ च्या ऐवजी LCM, व ⓜ च्या ऐवजी HCF वापरून (22) मधील गुणधर्म लिहिता येतील. LCM (s,*t*) व HCF (s,*t*) असे संकेतन वापरून (22) मधील पहिला गुणधर्म HCF [a, LCM (b, c)] = LCM [HCF (a, b), HCF (a, c)] असा लिहीता येईल. (22) मधील इतर गुणधर्म वाचकांनी याप्रकारे लिहून पाहावेत.

टीप (3) : (20) व (21) मिळून हे सांगते की : नैसर्गिक संख्यांच्या बाबतीत बेरीज व गुणाकार या क्रियांच्या बाबतीत जो गुणधर्म आढळून येत नाही तो मसावि, लसावि या क्रियांच्या बाबतीत आढळतो. नैसर्गिक संख्यांच्या संदर्भात 'गुणाकाराचे बेरजेवर वितरण होते पण बेरजेचे गुणाकारावर वितरण होत नाही' पण 'मसावि व लसावि यातील प्रत्येक क्रियेचे दुसऱ्या क्रियेवर वितरण होते' म्हणजे 'नैसर्गिक संख्यांमध्ये बेरीज व गुणाकार यांचे वागणे सममित नाही पण लसावि व मसावि यांचे वागणे सममित आहे'

ii) (K) 12 मसावि (12 लसावि 30) = 12 मसावि (60) = 12 .....(23)

(L) 15 लसावि (15 मसावि 35) = 15 लसावि (5) = 15 ......(24)

(23) व (24) हे गुणधर्म कोणत्याही दोन धनपूर्णांकाच्या बाबतीत लागू होतात [(23) व (24) या प्रत्येकात फक्त दोन धनपूर्णांक आहेत याची नोंद घ्या.] वाचकांनी इतर काही धनपूर्णांकांच्या संबंधात या गुणधर्माची सत्यता पडताळून पहावी.

व्यापकीकरण करून हे गुणधर्म असे मांडता येतील.

a व b हे कोणतेही दोन धनपूर्णांक असल्यास

a मसावि (a लसावि b) = a

आणि a लसावि (a मसावि b) = a ......(25)

आणि यांना शोषण - गुणधर्म म्हणतात

(कारण या दोन्ही गुणधर्मात जणू b चे शोषण होते.)

पृष्ठ 64 वरील परिशिष्ट 3 पहा.

6. काही सान्त संचावरील लसावि व मसावि यांचे आणखी विशेष गुणधर्म

कोणत्याही दोन किंवा अधिक धन पूर्णांकांचा लसावि व मसावि आपण काढू शकतो. त्यामुळे आतापर्यंतच्या विवेचनात आपण सर्व धन पूर्णांक (जे एकूण अनंत आहेत) विचारात घेतले होते. ज्यावेळी आपण वरील परिच्छेदांतून लसावि व मसावि या द्विपद क्रियांच्या गुणधर्मांची नोंद केली त्यावेळी या दोन्ही क्रिया N = {1, 2, 3, 4, 5, ...} या नैसर्गिक संख्यांच्या (म्हणजेच धन पूर्णांकांच्या) संचावर केल्या असल्याचे धरून चाललो होतो.

या नैसर्गिक संख्यांचे काही सान्त संच आपण विचारात घेतले तर त्या संचातील सदस्यांवर लसावि व मसावि या क्रिया करताना आतापावेतो वर उल्लेखिलेले गुणधर्म खरे असतातच. शिवाय त्याहूनही आणखी काही गुणधर्म खरे असल्याचे आढळून येते. तसे संच व ते गुणधर्म आपण आता अभ्यासूया.

कोणत्याही निरनिराळ्या सान्त मूळसंख्यांचा गुणाकार विचारात घ्या. त्याला M म्हणा. उदाहरणार्थ, 2, 3, व 5 या तीन निरनिराळ्या मूळसंख्या आहेत. त्यांचा गुणाकार आहे M = 2 x 3 x 5 = 30. आता M = 30 च्या सर्व अवयवांचा संच विचारात घ्या. तो आहे

F = { 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30 } ....(26)

या संचाच्या सदस्यांवर लसावि व मसावि या दोन द्विपद क्रिया करता येतील हे उघड आहे. जसे 5 लसावि 6 = 30, 3 मसावि 10 = 1, इत्यादी. आता F वरील लसावि व मसावि यांचे गुणधर्म पाहूया.

(α) F वरील लसावि या क्रियेचे गुणधर्म :

वर उपविभाग 3 मध्ये दिलेले (i) संवृत्तता, (ii) क्रमनिरपेक्षता, (iii) साहचर्य, (iv) 1 या अविकारक घटकाचे अस्तित्व, आणि (v) क्रियानिष्फलता हे पाचही गुणधर्म F वरील लसाविसाठी देखील खरे आहेत.

(β) F वरील मसावि या क्रियेचे गुणधर्म :

वर उपविभाग 4 मध्ये दिलेले (i) संवृत्तता, (ii) क्रमनिरपेक्षता, (iii) साहचर्य व (iv) क्रियानिष्फलता हे चारही गुणधर्म F वरील मसाविसाठी देखील खरे आहेत. त्याशिवाय आणखी एक गुणधर्म या बाबतीत खरा आहे. तो आहे : (v) अविकारक घटकाचे F मधील अस्तित्व : 30 हा F चा सदस्य असा आहे की

a हा F चा कोणताही सदस्य असल्यास मसावि (a, 30) = a	.....(27)

जसे मसावि (10, 30) = 10 इत्यादी. वाचकांनी F मधील सर्व सदस्यांसाठी हा गुणधर्म सत्य असल्याचे तपासून पहावे. F मध्ये 30 हा सदस्य मसावि या क्रियेचा अविकारक घटक आहे.

(γ) F वरील लसावि आणि मसावि यांचे एकत्रित गुणधर्म :

वर उपविभाग 5 मध्ये दिलेले पुढील गुणधर्म F च्या बाबतीतही खरे आहेत. वाचकांनी विविध उदाहरणे हाताळून त्यांच्या खरेपणाचा प्रत्यय घ्यावा.

i) F मध्ये लसावि ही क्रिया मसावि या क्रियेवर वितरित होते.

ii) F मध्ये मसावि ही क्रिया लसावि या क्रियेवर वितरित होते.

iii) F मध्ये मसावि व लसावि या क्रियांच्या बाबतीत शोषण गुणधर्म खरा ठरतो.

या तीन गुणधर्मांशिवाय F मध्ये लसावि व मसावि या द्विपद क्रिया एकत्रित विचारात घेतल्यास पुढील आणखीन गुणधर्म खरे उतरतात.

iv) लसावि व मसावि या F च्या सदस्यांवर केल्या जाणाऱ्या द्विपद क्रिया आहेत. त्या व्यतिरिक्त F च्या सदस्यांवर केल्या जाणाऱ्या एकपद क्रियेची (म्हणजे फक्त एकाच सदस्यावर केली जाणारी - जशी वर्गमूळ काढणे ही एकाच संख्येवर केली जाणारी एकपद क्रिया आहे -) व्याख्या अशी आहे.

a हा F चा सदस्य असल्यास a' = a चा पूरक सदस्य (complement) = F मधील मोठ्यात मोठा पूर्णांक / a = 30/a म्हणजे 1' = 30, 2' = 15, 3'= 10. ....इत्यादी	........(28)

आता लसावि (a, a') = F वरील मसावि या क्रियेचा अविकारक घटक = 30

आणि मसावि (a, a') = F वरील लसावि या क्रियेचा अविकारक घटक = 1

उदाहरणार्थ लसावि (6, 6') = लसावि (6, 5) = 30

मसावि (5. 5') = मसावि (5, 6) = 1

वाचकांनी इतर उदाहरणे घेऊन या गुणधर्माचा प्रत्यय घ्यावा.

टीप (4) : F मध्ये a' या पूर्णांकाची पूरक- संख्या a असते.

म्हणजेच a च्या पूरकाचा पूरक (Double complementation) a च असतो.	..(29)

जसे : (1')' = 30' = 1; (2')' = 15' = 2, ...इत्यादि

(v) द मॉर्गन - गुणधर्म (De Morgan law or rule)

F मधील सदस्यांसाठी

(2 मसावि 10)' = (2)' = 15

व 2' लसावि 10' = 15 लसावि 3 = 15 } ......(30)

आणि (6 लसावि 15)' = 30' = 1

व 6' मसावि 15' = 5 मसावि 2 = 1 } ....(31)

F च्या इतर कोणत्याही दोन सदस्यांसाठीही हा गुणधर्म खरा आहे. उदाहरणे घेऊन वाचकांनी त्याचा प्रत्यय घ्यावा.

व्यापकदृष्ट्या हे गुणधर्म पुढीलप्रमाणे मांडतात व त्यांना **द मॉर्गनचे गुणधर्म** म्हणतात.

a व b हे F चे कोणतेही सदस्य असल्यास (a मसावि b)' = a' लसावि b' आणि (a लसावि b)' = a' मसावि b'	.....(32)

vi)	a व b हे F चे कोणतेही दोन सदस्य असल्यास (a' लसावि b')' लसावि (a' लसावि b)' = a	.....(33)

याचे एक उदाहरण घेऊया : समजा a = 3, b = 10.

(a' लसावि b') लसावि (a' लसावि b)'

= (3' लसावि 10')' लसावि (3' लसावि 10)'
= (10 लसावि 3)' लसावि (10 लसावि 10)'
= (30)' लसावि (10)'
= 1 लसावि 3
= 3

वाचकांनी इतर उदाहरणे घेऊया या गुणधर्माचा प्रत्यय घ्यावा.

vii) a हा F चा कोणताही सदस्य असल्यास

a लसावि (F मधील मसाविचा अविकारक घटक)
= F मधील मसाविचा अविकारक घटक ....34(i)

a मसावि (F मधील लसाविचा अविकारक घटक)
= F मधील लसाविचा अविकारक घटक ....34(ii)

उदाहरणार्थ,

15 लसावि (30) = 30, [F मध्ये मसाविचा अविकारक घटक आहे 30, पहा (27)]

6 मसावि (1) = 1, [F मध्ये लसाविचा अविकारक घटक आहे 1]

a साठी इतर किंमती घेऊन वाचकांनी हे गुणधर्म पडताळावेत.

7. F सारखे आणखीन संच आहेत का ? :

सर्व धनपूर्णांकांचा अनंत संच विचारात घेतला असता त्यावर करण्यात येणाऱ्या लसावि व मसावि या द्विपद क्रियांचे कितीतरी गुणधर्म आपण पाहीले. ते सर्व गुणधर्म F या सान्त संचावरील लसावि व मसावि या क्रियांबाबतीत खरे असतातच पण या क्रियांचे आणखीनही काही निराळे गुणधर्म F च्या बाबतीत मिळाले. मग साहजिकच मनात प्रश्न उभा ठाकतो की F हा असा एकमेव संच आहे का ? पण तसे नाही. आणखीनही अनेक सान्त संच आहेत की ज्यांवरील लसावि व मसावि या क्रिया F च्या बाबतीतले सर्व गुणधर्म पाळतात. असा F सारखा संच कसा तयार करावयाचा ? अगदी सोपे आहे ते. कोणत्याही व कितीही पण सान्त भिन्न भिन्न मूळसंख्या घ्या. त्यांचा गुणाकार करा. समजा तो गुणाकार M आहे. M च्या सर्व अवयवांचा संच लसावि व मसावि या क्रियांच्या गुणधर्मांच्या बाबतीत अगदी तंतोतंत F सारखाच वागतो. उदाहरणार्थ,

i) 3 x 7 = 21. 21 च्या सर्व अवयवांचा संच = F_2 = { 1, 3, 7, 21 }

ii) 2 x 7 x 13 = 182. 182 च्या सर्व अवयवांचा संच = { 1, 2, 7, 13, 14, 26, 91, 182 } = F_3

F_2 व F_3 व अशाच प्रकारचे संच तयार करून त्यावरील लसावि व मसावि या क्रिया F प्रमाणेच त्या सर्व गुणधर्मांना खऱ्या उतरतात याचा प्रत्यय वाचकांनी अवश्य घ्यावा.

गुणाकार करताना भिन्न भिन्न मूळसंख्या न घेता, कांही मूळसंख्या एकापेक्षा अधिक वेळा घेतल्यास व अशांचा गुणाकार D असेल तर D च्या सर्व अवयवांच्या संचात वरपैकी काही गुणधर्म खरे असत नाहीत. उदाहरणार्थ D = 3 x 3 x 2 x 2 = 36. आता Q = { 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36 } मध्ये कोणते गुणधर्म खरे नसतील ते शोधा.

8. समारोप :

सर्वसाधारणत: धनपूर्णांकाचे लसावि व मसावि काढण्याच्या रीतीच फक्त आपण शिकतो, पण त्या क्रियांचे गुणधर्म अभ्यासत नाही. ते गुणधर्म सुंदर असून आपण ते या लेखात जाणून घेतले. अशातऱ्हेने N या सर्व धनपूर्णांकाच्या संचावरील लसावि व मसावि या क्रिया (1) ते (9), (16) ते (21), (25) आणि (34ii) हे एकूण 17 गुणधर्म दाखवितात. F (व त्यासारखे F_2, F_3 इत्यादी) संचावरील याच लसावि व मसावि या क्रिया हे 17 गुणधर्म दाखवितातच व त्या व्यतिरिक्त (27), (32), (33), (34 i) हे जादा चार गुणधर्मही दाखवितात.

अमूर्तीकरण हा गणिताचा आत्मा आहे. एखादा संच व त्यावरील काही क्रियांचे गुणधर्म मिळून एक संरचना (structure) तयार होते. या लेखात आपण दोन संरचना तपासल्या : i) नैसर्गिक संख्यांचा संच N व त्यावरील लसावि व मसावि या द्विपद क्रियांचे गुणधर्म, आणि (ii) F व F सारखे संच व त्यावरील लसावि व मसावि या द्विपद क्रिया आणि पूरक सदस्य घेण्याची एकपद क्रिया यांचे गुणधर्म. इतरही अनेक संच व त्यावरील क्रिया अनेक विविध गुणधर्म दाखवितात. त्यांच्या आधारावर गणितात group, ring, integral domain, lattice, field, vector - space, Booleen algebra अशा अनेक अमूर्त संरचना तयार केल्या आहेत. गणिताच्या विद्यार्थ्याला त्यांचा अभ्यास महत्त्वाचा व उपयुक्त ठरतो. त्यानुसार i) धन पूर्णांकाचा संच N व त्यावरील लसावि,

मसावि या द्विपद क्रिया ही संरचना distributed lattice with minimum element ठरते आणि ii) F सारखे (भिन्न भिन्न मूळ संख्यांच्या गुणाकाराच्या सर्व अवयवांचे) संच व त्यावरील लसावि-मसावि या दोन द्विपद क्रिया व पूरक-सदस्य घेण्याची एकपद क्रिया मिळून होणारी संरचना Booleen algebra ठरते.

संच व त्यावरील संयोग (union), छेद (intersection), व पूरक-संच मिळवण्याची एकपद क्रिया या संरचनेचे जे जे म्हणून गुणधर्म आहेत ते ते (व फक्त तेच) सर्व गुणधर्म F सारखे संच व त्यावरील लसावि-मसावि या दोन द्विपद क्रिया व पूरक - सदस्य मिळवण्याची एकपद क्रिया यांच्या बाबतीत तंतोतंत खरे असल्याचे आढळून येते. विधाने व त्यावरील 'आणि', 'किंवा', 'नकार' या क्रिया, विजेचे खटके (switches) व ते एकसर (serially) अथवा समांतर (parallely) जोडण्याच्या क्रिया यांचे गुणधर्म देखील अशाच प्रकारचे असतात. म्हणून गणिती या वेगवेगळ्या क्षेत्रातील उपयोगी स्थितींचा अभ्यास अमूर्त संरचनेद्वारे करतात.

अशाप्रकारे संचावरील क्रियांचे गुणधर्म आणि भिन्न भिन्न, पण सान्त मूळसंख्यांच्या गुणाकाराच्या अवयवांचा संच व त्यावरील लसावि-मसावि क्रियांचे गुणधर्म यांच्यातील साधर्म्य लक्षात घेणे गणिताच्या शास्त्रशुद्ध अभ्यासाच्या दृष्टीकोनातून फायदेशीर ठरते.

☆ ☆ ☆

परिशिष्ट

1

1. मूळसंख्येची पृष्ठ 29 वर दिलेली (D11) ही तिसरी व्याख्या खालीलप्रमाणे देखील लिहिता येईल.

   ज्याचा स्वतःहून लहान असलेला धन अवयव फक्त 1 हाच असतो, अशा धन पूर्णांकाला मूळसंख्या म्हणतात.

2. मूळ संख्येची चौथी व्याख्या अशी देता येईल :

   1 वगळता जो धनपूर्णांक त्याच्याहून कोणत्याही 2 लहान धनपूर्णांकांच्या गुणाकाराबरोबर नसतो त्याला मूळ संख्या म्हणतात.

2

8 . परिपूर्ण (किंवा सुडौल) संख्या (perfect numbers)

मनोरंजनात्मक (recreational) गणितात 'परिपूर्ण (किंवा सुडौल) संख्या' नामक एक संकल्पना आहे. तिची एक व्याख्या अशी आहे :

ज्या धन पूर्णांकाच्या तो पूर्णांक सोडून असलेल्या सर्व धन अवयवांची बेरीज त्या पूर्णांकाबरोबर असते त्या धनपूर्णांकाला परिपूर्ण किंवा सुडौल संख्या म्हणतात. .... (D26)

उदाहरणार्थ :

6 चे धन अवयव आहेत 1, 2, 3, 6. आता 6 वगळता 1 + 2 + 3 = 6. तसेच 1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28. म्हणून (D26) नुसार 6 व 28 या परिपूर्ण (सुडौल) संख्या आहेत. आतापर्यंत अशा एकूण 42 परिपूर्ण (सुडौल) संख्या माहीत आहेत.

परिपूर्ण (सुडौल) संख्येची दुसरी व्याख्या अशी दिली जाते :

ज्या धन पूर्णांकाच्या सर्व धन अवयवांची बेरीज त्या धनपूर्णांकाच्या दुप्पट असते त्या धनपूर्णांकाला परिपूर्ण (सुडौल) संख्या म्हणतात. ..... (D27)

कोणत्याही पूर्णांकाचा तो पूर्णांक हाही एक अवयव असतो. तो वगळण्यास (D27) मध्ये सांगितलेले नाही. म्हणून 6 चे धन अवयव होतात 1, 2, 3 व 6,

आणि 1 + 2 + 3 + 6 = 12 = 2 x 6 तसेच 28 व इतर परिपूर्ण (सुडौल) संख्यांच्या बाबतीत लागू पडेल. यावरून (D26) व (D27) या वैकल्पिक व्याख्यांची समतुल्यता लक्षात येईल.

3

[पृष्ठ 57, (25) पुढे]
शोषण - नियमांची सिद्धता

साध्य : a मसावि (a लसावि b) = a आणि a लसावि (a मसावि b) = a

सिद्धता : समजा a लसावि b = p ....(1)

$\therefore$ $a \leq p$ आणि a ने p ला नि:शेष भाग जातो

$\therefore$ a मसावि p = a ....(2)

$\therefore$ a मसावि (a लसावि b) = a मसावि p = a, [(1) व (2) वापरून]

याचप्रमाणे दुसरा शोषण नियम सिद्ध करता येईल.

☆ ☆ ☆

लेखकाविषयी :

डॉ.व.ग.टिकेकर

- इंडियन इन्स्टिट्यूट ऑफ सायन्स (I.I.Sc.) बंगलोरच्या गणित विभागातील निवृत्त प्राध्यापक व विभाग प्रमुख.
- युनिव्हर्सिटी ऑफ न्यूकॅसल अपॉन टाईन (UK) च्या कॉम्प्युटिंग लॅब विभागात वर्षभर कॉमनवेल्थ ॲकॅडेमिक स्टाफ फेलो.
- महाराष्ट्र गणित अध्यापक महामंडळाच्या वार्षिक अधिवेशनाचे (अमरावती, 1982) चे अध्यक्ष.
- युनिव्हर्सिटी ऑफ मिशिगन, ॲन आर्बर (USA) च्या इंडस्ट्रिअल अँड ऑपरेशन्स इंजिनिअरींग विभागात वर्षभर इंडोअमेरिकन फेलो.
- I.I.SC. च्या जया-जयंत अवॉर्ड फॉर टिचिंग एक्सलन्स हा पुरस्कार प्राप्त (1989).
- नॅशनल इन्स्टिट्यूट ऑफ ॲडव्हान्स्ड स्टडिज्‌चे तीन वर्षे सिनिअर असोसिएट.
- NCERT व कर्नाटक शासनाच्या पाठ्यपुस्तक समितीत व नॅशनल ओपन स्कूल दिल्लीच्या कार्यात योगदान.
- राष्ट्रीय व आंतरराष्ट्रीय शास्त्रीय नियतकालिकांतून अनेक शोध-लेख व निबंध प्रकाशित.
- अनेक राष्ट्रीय संस्थांच्या शैक्षणिक व निवड समित्यांवर कार्य.
- विविध राष्ट्रीय व परदेशीय संशोधन व शैक्षणिक परिषदात भाग व स्मृती व्याख्यानांचे वक्ते
- 75 पेक्षा अधिक प्रकाशने (पुस्तके, शोधनिबंध, लेख)

पुस्तिका क्र. 28

वाई तालुका गणित अध्यापक मंडळ, वाई

द्वारा : श्री.ना.शं.मोने, 1123, भाग्योदय, ब्राह्मणशाही, वाई - 412 803.

दूरध्वनी : (02167) 220766, Email : nagesh.mone@gmail.com